Gewöhnliche Differentialgleichungen

Vorbemerkungen.
Eine gewöhnliche Differentialgleichung ist eine Gleichung, wo neben einer gesuchten Funktion $y(x)$ auch deren Ableitungen y', y'' etc. auftreten, z.B. $y''' + \cos x \cdot y'y'' = e^x$. Eine Funktion $\varphi(x)$, welche eine vorliegende Differentialgleichung identisch erfüllt, heisst **Lösung** der Differentialgleichung.

Die **Ordnung** einer Differentialgleichung ist der Grad der höchsten auftretenden Ableitung (obiges Beispiel wäre eine Differentialgleichung 3. Ordnung).

Für Differentialgleichungen 1. Ordnung gibt es

- die **explizite Form** : $y' = f(x,y)$ bzw. $x' = g(x,y)$

Gesucht ist dabei $y(x)$ bzw. $x(y)$.

- die **symmetrische Darstellung** : $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$

(Aus $y' = \frac{dy}{dx} = f(x,y)$ ergibt sich dann etwa $f(x,y)dx - dy = 0$)

. . . .

Exakte Differentialgleichungen

Zur Wiederholung: das totale Differential einer Funktion $F(x,y)$ ist gegeben durch $dF = F_x dx + F_y dy$.

Definition. Eine Differentialgleichung $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ heisst **exakt**, wenn es eine Funktion $F(x,y)$ gibt mit

$$F_x = P \quad \text{und} \quad F_y = Q \ ,$$

d.h. $Pdx + Qdy$ ist das totale Differential von F , und die Differentialgleichung hat somit die Form $dF = 0$.

$F(x,y)$ heisst dann **Stammfunktion**.

Satz. Für einfach zusammenhängende Gebiete gilt:

$Pdx + Qdy = 0$ ist exakt genau dann, wenn die sogenannte **Integrabilitätsbedingung** erfüllt ist, d.h. wenn $P_y = Q_x$.

Beispiel. Sei $(y\cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2e^y - 1)dy = 0$.

$P(x,y) = y\cos x + 2xe^y \Rightarrow P_y = \cos x + 2xe^y$

$Q(x,y) = \sin x + x^2e^y - 1 \Rightarrow Q_x = \cos x + 2xe^y$

Die Differentialgleichung ist damit exakt.

Beispiel. $(x+y)dx + y^2dy = 0$ ist nicht exakt.

$(P_y = 1\ ,\ Q_x = 0)$

Satz. Die allgemeine Lösung einer exakten Differentialgleichung ist

$$F(x,y) = C \quad , \ C \in \mathbb{R} \ldots \text{const.}$$

Dabei ist F eine Stammfunktion. Es sei weiters erwähnt, dass sich zwei Stammfunktionen zu $Pdx + Qdy = 0$ nur durch eine additive Konstante unterscheiden.

Sei nun $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ exakt, d.h. es existiert eine Funktion $F(x,y)$ mit $F_x = P\ ,\ F_y = Q$.

Wie kann $F(x,y)$ gefunden werden?

1. Möglichkeit

Wir integrieren $F_x = P$ nach x und erhalten

$F(x,y) = \int P(x,y)dx = P^*(x,y) + \phi(y)$.

Aus $F_y = Q$ folgt dann

$P_y^* + \phi'(y) = Q \quad \Rightarrow \quad \phi'(y) = -P_y^* + Q \quad \Rightarrow \quad \phi(y)$

(Die Integrabilitätsbedingung gewährleistet, dass $\phi'(y)$ **nur** eine Funktion von y ist!)

2. Möglichkeit

Wir integrieren $F_y = Q$ nach y und erhalten

$F(x,y) = \int Q(x,y)dy = Q^*(x,y) + \psi(x)$.

Aus $F_x = P$ folgt dann

$Q_x^* + \psi'(x) = P \quad \Rightarrow \quad \psi'(x) = -Q_x^* + P \quad \Rightarrow \quad \psi(x)$

(Die Integrabilitätsbedingung gewährleistet, dass $\psi'(x)$ **nur** eine Funktion von x ist!)

Beispiel. Wir betrachten die Differentialgleichung von vorher

$$(y\cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2e^y - 1)dy = 0$$

Diese ist exakt, $P(x,y) = y\cos x + 2xe^y$, $Q(x,y) = \sin x + x^2e^y - 1$.

$F = \int P(x,y)dx = \int (y\cos x + 2xe^y)dx = y\sin x + x^2e^y + \phi(y)$

Wegen $F_y = Q$ erhalten wir nun

$\sin x + x^2e^y + \phi'(y) = \sin x + x^2e^y - 1 \quad \Rightarrow \quad \phi'(y) = -1 \quad \Rightarrow \quad \phi(y) = -y$

(da wir nur eine Stammfunktion benötigen).

Folglich ist $F(x,y) = y\sin x + x^2e^y - y$ eine Stammfunktion und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist

$$F(x,y) = y\sin x + x^2e^y - y = C \quad , \ C \in \mathbb{R} \ .$$

(D.h. für jeden Wert $C \in \mathbb{R}$ ergibt sich eine Lösung, es liegen also unendlich viele Lösungen vor.)

Beispiel. $(\tan y - 3x^2)dx + \frac{x}{\cos^2 y}dy = 0$

$P = \tan y - 3x^2 \quad \Rightarrow \quad P_y = \frac{1}{\cos^2 y} \quad , \quad Q = \frac{x}{\cos^2 y} \quad \Rightarrow \quad Q_x = \frac{1}{\cos^2 y}$

Die Differentialgleichung ist also exakt. Aus $F_y = Q$ folgt nun

$F = \int \frac{x}{\cos^2 y}dy = x\tan y + \psi(x)$.

Aus $F_x = P$ ergibt sich nun $\tan y + \psi'(x) = \tan y - 3x^2 = -3x^2 \Rightarrow \psi(x) = -x^3$.

Folglich ist $F(x,y) = x\tan y - x^3 = C$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Ist $Pdx + Qdy = 0$ nicht exakt, dann kann die Differentialgleichung unter Umständen durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor $\mu(x,y)$ in eine exakte übergeführt werden (welche dieselbe Lösungsgesamtheit wie die Ausgangsgleichung besitzt).

Wenn wir $Pdx + Qdy = 0$ mit einer Funktion $\mu(x,y)$ multiplizieren, erhalten wir $(\mu P)dx + (\mu Q)dy = 0$. Damit diese (neue) Gleichung exakt ist, muss gelten

$$(\mu P)_y = (\mu Q)_x \quad \Leftrightarrow \quad \mu_y P + \mu P_y = \mu_x Q + \mu Q_x$$

$$\text{bzw.} \quad Q\mu_x - P\mu_y = \mu(P_y - Q_x)$$

Eine Funktion $\mu(x,y)$, welche dieser Bedingung genügt, heisst **integrierender Faktor** oder **Euler'scher Multiplikator** der Dgl. $Pdx+Qdy = 0$.

Obige Bedingung ist eine partielle Differentialgleichung für die Funktion $\mu(x,y)$, und damit scheint die Situation verkompliziert worden zu sein. Allerdings kann man daraus wichtige Spezialfälle herleiten, von denen wir zwei herausgreifen.

- Wir fragen, wann ein integrierender Faktor existiert, der **nur** von x abhängt.

Also $\mu = \mu(x)$. Wir setzen dann $\mu_x = \mu'$, und es ist $\mu_y = 0$.

$$Q\mu' = \mu(P_y - Q_x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mu'}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{Q}$$

Dies bedeutet, dass $\frac{P_y - Q_x}{Q}$ **nur** eine Funktion von x sein darf!

Integration nach x liefert dann

$$\ln|\mu| = \int \frac{P_y - Q_x}{Q}dx \quad \Rightarrow \quad \mu = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q}dx}$$

• Analog wird die Frage behandelt, wann ein integrierender Faktor existiert, der **nur** von y abhängt.

Also $\mu = \mu(y)$. Wir setzen dann $\mu_y = \mu'$, und es ist $\mu_x = 0$.

$-P\mu' = \mu(P_y - Q_x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mu'}{\mu} = \frac{Q_x - P_y}{P}$

Dies bedeutet, dass $\frac{Q_x - P_y}{P}$ **nur** eine Funktion von y sein darf!

Integration nach y liefert dann

$\ln|\mu| = \int \frac{Q_x - P_y}{P} dy \quad \Rightarrow \quad \mu = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{P} dy}$

Zusammengefasst:

1) Hängt $\frac{P_y - Q_x}{Q}$ nur von x ab, dann ist $\mu = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx}$ ein integrierender Faktor.

2) Hängt $\frac{Q_x - P_y}{P}$ nur von y ab, dann ist $\mu = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{P} dy}$ ein integrierender Faktor.

. . . .

Differentialgleichungen 2. Ordnung

Bei einer Dgl. 2. Ordnung für die Funktion $y(x)$ treten im allgemeinen die Größen x, y, y', y'' auf. In diesem Abschnitt sollen gewisse Typen derartiger Dgl. erwähnt werden, die auch relativ leicht gelöst werden können.

Beispiel. In vielen Fragestellungen der Physik hat man es mit dem zurückgelegten Weg zum Zeitpunkt t zu tun, bezeichnet mit $s(t)$.

Dann ist offenbar $v(t) = \dot{s}(t)$ die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t , und $b(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t)$ die Momentanbeschleunigung zum Zeitpunkt t .

Beim freien Fall im Vakuum ergibt sich die Dgl. $\ddot{s} = g$, wobei g die Erdbeschleunigung bezeichnet $(g = 9.81 \frac{m}{sec^2})$.

Einmalige Integration nach t liefert $v(t) = gt + C_1$, und nochmalige Integration nach t

$s(t) = g\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$.

Hier treten bei der allgemeinen Lösung zwei beliebige Konstanten C_1, C_2 auf, welche durch Zusatzbedingungen, wie etwa Anfangsbedingungen (AB), festgelegt werden können.

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ möge etwa gelten: $s(0) = 0$ und $v(0) = 0$.

Wird $s(0) = 0$ in die allgemeine Lösung eingesetzt, erhalten wir $C_2 = 0$.

Wird $v(0) = 0$ in die Gleichung $v(t) = gt + C_1$ eingesetzt, erhalten wir $C_1 = 0$.

Diese spezielle Lösung stellt das bekannte Fallgesetz $s(t) = g\frac{t^2}{2}$ dar.

Typ A : $y'' = f(x)$

Hier treten y und y' explizit nicht auf. Die Lösung ergibt sich durch zweimalige Integration

$$y' = \int f(x)dx + C_1 = g(x) + C_1$$

$$y = \int (g(x) + C_1)dx + C_2 = \int g(x)dx + C_1 x + C_2$$

Typ B : $y'' = f(x, y')$

Hier tritt y explizit nicht auf. Wir wählen die Substitution $p(x) = y'(x)$ und erhalten die Differentialgleichung 1. Ordnung $p'(x) = f(x, p)$ für $p(x)$.

Beispiel. $(1 - x^2)y'' - xy' = 0$ für $|x| < 1$.

$p(x) = y'(x) \Rightarrow (1 - x^2)p' - xp = 0$ bzw. $\frac{p'}{p} = \frac{x}{1-x^2} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{x}{1-x^2}dx$

Integration liefert $\int \frac{dp}{p} = \int \frac{x}{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x}{1-x^2}dx$,

also $\ln|p| = -\frac{1}{2}\ln|1 - x^2| + \ln|C_1|$.

Damit $|p| = \frac{|C_1|}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow p = \frac{C_1}{\sqrt{1-x^2}}$, $C_1 \in \mathbb{R}$

$p = y' = \frac{C_1}{\sqrt{1-x^2}} \;\; \Rightarrow \;\; y = \int \frac{C_1}{\sqrt{1-x^2}} dx = C_1 \arcsin x + C_2$

Typ C : $y'' = f(y, y')$

Hier tritt x explizit nicht auf. Wir wählen die Substitution $y'(x) = p(y(x)) = p(y)$.

Mit $y'' = \frac{d}{dx}(p(y(x))) = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'p$ erhalten wir die Dgl.

$$p'p = f(y, p)$$

für die Funktion $p(y)$.

Beispiel. $(y+1)y'' + y'^2 = 0$

Mit $y' = p(y)$, $y'' = p'p$ erhalten wir

$$(y+1)p'p + p^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad p[(y+1)p' + p] = 0$$

Fall 1: $p = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; y' = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; y = C_1 \; , \; C_1 \in \mathbb{R}$

Fall 2: $(y+1)p' + p = 0$

Dies liefert $(y+1)\frac{dp}{dy} = -p$ bzw. $\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y+1}$

$\Rightarrow \;\; \ln|p| = -\ln|y+1| + \ln|C_2|$ bzw. $p = \frac{C_2}{y+1} = y'$

Nun $(y+1)dy = C_2 dx \;\; \Rightarrow \;\; \frac{y^2}{2} + y = C_2 x + C_3 \;\; , \;\; C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

. . . .

Lineare Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung

In der Vorlesung Mathematik 1 wurde bereits der Fall einer linearen Dgl. 1. Ordnung diskutiert. Diese hat die Form

$$a_0(x)y' + a_1(x)y = s(x) \quad \text{bzw.} \quad y' + g(x)y = s(x)$$

Eine lineare Differentialgleichung zweiter bzw. höherer Ordnung hat die Form

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = s(x)$$

$$a_0(x)y''' + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = s(x)$$

$$\vdots$$

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = s(x)$$

Bemerkung. Zu gegebenen Funktionen $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ können wir einen **Differentialoperator** L betrachten, der einer Funktion $y(x)$ die Funktion

$$L[y] = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y$$

zuordnet.

Dies ist ein **linearer** Operator, d.h. es gilt

$$L[C_1y_1(x) + \ldots + C_ny_n(x)] = C_1L[y_1(x)] + \ldots + C_nL[y_n(x)]$$

für $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$

$C_1y_1(x) + \ldots + C_ny_n(x)$ ist eine sogenannte Linearkombination der Funktionen $y_1(x), \ldots, y_n(x)$.

Definition.

$L[y] = 0$ ... **homogene Dgl.**

$L[y] = s(x)$, $s(x) \neq 0$ ... **inhomogene Dgl.**

Satz. Sei $L[y] = 0$ gegeben.

Dann bilden die Lösungen dieser Differentialgleichung einen Vektorraum, d.h. insbesondere

1) $y \equiv 0$ ist Lösung, die sogenannte triviale Lösung.

2) Sind $y_1, y_2, \ldots, y_k$ Lösungen von $L[y] = 0$, dann auch

$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ky_k(x)$, $C_1, C_2, \ldots, C_k \in \mathbb{R}$

Beispiel. Wir betrachten $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Durch Einsetzen in die Dgl. sehen wir, dass die Funktionen $y_1(x) = e^x$

und $y_2(x) = e^{2x}$ Lösungen sind.

Damit ist jede Linearkombination $C_1y_1(x)+C_2y_2(x) = C_1e^x+C_2e^{2x}$ ebenfalls eine Lösung , $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, z.B. $y(x) = 5e^x - 3e^{2x}$.

Definition. Die Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_k$ heissen **linear abhängig**, wenn es Konstanten $C_1, C_2, \ldots, C_k$ gibt, die nicht alle gleichzeitig Null sind, sodass

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ky_k(x) = 0 \quad \forall\ x\ .$$

Ansonsten heissen die Funktionen **linear unabhängig**.

Beispiel. Die Funktionen $y_1(x) = 1 + x$, $y_2(x) = 2 - 3x$, $y_3(x) = x$ sind linear abhängig, weil

$$2y_1 + (-1)y_2 + (-5)y_3 \equiv 0$$

Beispiel. Wir betrachten $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$.

Aus $C_1e^x + C_2e^{2x} = 0\ \forall\ x$ folgt, dass $C_1 + C_2e^x = 0\ \forall\ x$.

Wäre $C_2 \neq 0$, dann $e^x = -\frac{C_1}{C_2}$ ...const., ein Widerspruch. Also $C_2 = 0$, und damit verbleibt $C_1 = 0$.

Somit sind die beiden Funktionen linear unabhängig.

Satz. Sei $L[y] = 0$ eine Differentialgleichung n-ter Ordnung. Dann gibt es n linear unabhängige Lösungen $y_1, y_2, \ldots y_n$ und **alle** Lösungen sind gegeben durch

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ny_n(x) \quad , \ C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R} \ \text{gegeben.}$$

Sind irgendwelche n linear unabhängige Lösungen gegeben, dann nennt man diese auch ein **Fundamentalsystem (FS)** .

Satz. Die Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_k$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die **WRONSKI-Determinante** ungleich Null ist:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_k \\ y_1' & y_2' & \dots & y_k' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_k'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(k-1)} & y_2^{(k-1)} & \dots & y_k^{(k-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

Beispiel. Wir betrachten wieder $y_1(x) = e^x$ und $y_2(x) = e^{2x}$.

$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = e^{3x} \neq 0$, also linear unabhängig.

Beispiel. Sei wieder $y_1(x) = 1 + x$, $y_2(x) = 2 - 3x$, $y_3(x) = x$.

$W(x) = \begin{vmatrix} 1+x & 2-3x & x \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$. also linear abhängig.

. . . .

Homogene lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Diese haben die Form $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ mit $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$, bzw.

$$y'' + \tfrac{a_1}{a_0} y' + \tfrac{a_2}{a_0} y = y'' + py' + qy = 0 \ .$$

Um Lösungen zu finden, treffen wir den Ansatz $y = e^{\lambda x}$. Dann ist $y' = \lambda e^{\lambda x}$ und $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$.

Eingesetzt in die Dgl. erhalten wir die **charakteristische Gleichung**

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + q e^{\lambda x} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

mit $\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Dabei sind jetzt drei Fälle zu unterscheiden.

Fall 1: $\frac{p^2}{4} - q > 0$

Wir erhalten zwei reelle Werte λ_1, λ_2 mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$, und zugehörige

Lösungen $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$.

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \neq 0$$

Damit sind die beiden Lösungen linear unabhängig, und die allgemeine Lösung der Dgl. ist

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \quad , \; C_1, C_2 \in \mathbb{R} \; .$$

Beispiel. $y'' - 3y' + 2y = 0$

Charakteristische Gleichung ist $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$.

Somit ist die allgemeine Lösung $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} \quad , \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Fall 2: $\frac{p^2}{4} - q = 0$ **(innere Resonanz)**

Wir erhalten mit dem Ansatz nur einen Wert, nämlich $\lambda = -\frac{p}{2}$ und die zugehörige Lösung $y_1(x) = e^{\lambda x}$.

Durch Einsetzen in die Dgl. sieht man, dass $y_2(x) = x e^{\lambda x}$ ebenfalls eine Lösung ist.

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda x} & x e^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & (1 + \lambda x) e^{\lambda x} \end{vmatrix} = e^{2\lambda x} \neq 0$$

Somit sind die beiden Lösungen linear unabhängig, und die allgemeine Lösung der Dgl. ist

$$y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} \quad , \; C_1, C_2 \in \mathbb{R} \; .$$

Beispiel. $y'' + 2y' + y = 0$

Charakteristische Gleichung ist $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = -1$.

Also liegt innere Resonanz vor und die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} \quad , \; C_1, C_2 \in \mathbb{R} \; .$$

Fall 3: $\frac{p^2}{4} - q < 0$

Wir erhalten zwei konjugiert komplexe Lösungen $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\beta \neq 0$, und suchen reellwertige Lösungen $y(x)$.

Mit der Euler'schen Formel gilt $e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i\sin(\beta x)$ und $e^{-i\beta x} = \cos(\beta x) - i\sin(\beta x)$.

Damit ist $y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))$ und

$y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) - i\sin(\beta x))$

Durch Einsetzen in die Dgl. stellt sich heraus, dass der Realteil $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ und der Imaginärteil $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ (bzw. $-e^{\alpha x}\sin(\beta x)$) reellwertige Lösungen der Dgl. sind.

Diese beiden Funktionen bilden ein Fundamentalsystem, weil

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos(\beta x) & e^{\alpha x}\sin(\beta x) \\ (\alpha\cos(\beta x) - \beta\sin(\beta x))e^{\alpha x} & (\alpha\sin(\beta x) + \beta\cos(\beta x))e^{\alpha x} \end{vmatrix} =$$

$e^{2\alpha x}\beta \neq 0$

Beispiel. Wir betrachten eine freie ungedämpfte Schwingung, welche durch $y'' + \omega^2 y = 0$ mit $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$ gegeben ist.

Die charakteristische Gleichung ist $\lambda^2 + \omega^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Hier ist also $\alpha = 0$, $\beta = \omega$.

Damit sind $y_1(x) = \cos(\omega x)$ und $y_2(x) = \sin(\omega x)$ Fundamentallösungen, und die allgemeine Lösung ist eine Linearkombination dieser beiden Lösungen, i.e.

$$y(x) = C_1\cos(\omega x) + C_2\sin(\omega x) \quad , \; C_1, C_2 \in \mathbb{R} \; .$$

Man beachte, dass wir hier periodische Lösungen erhalten.

. . . .

Homogene lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0 \quad , \; a_i \in \mathbb{R} \; , \; a_0 \neq 0$$

Mit dem Exponentialansatz $y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $\ldots, y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$

erhalten wir $e^{\lambda x}(a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n) = 0$ bzw. das

charakteristische Polynom $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$.

Bemerkung. Das charakteristische Polynom $P_n(x)$ hat genau n komplexe Nullstellen (von denen einige natürlich reell sein können).

Weiters gilt: ist $\lambda_j = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$ eine Nullstelle mit der Vielfachheit n_j , dann ist auch $\overline{\lambda_j} = \alpha - i\beta$ eine Nullstelle mit der Vielfachheit n_j .

Satz. Es seien λ_1 , λ_2 , ... , λ_r die verschiedenen Nullstellen von $P_n(x)$ mit Vielfachheiten $n_1, n_2, \ldots, n_r$, $(n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n)$.

Zu λ_j gibt es dann n_j zugehörige linear unabhängige Lösungen, und zwar

$$e^{\lambda_j x} \ , \ xe^{\lambda_j x} \ , \ x^2 e^{\lambda_j x} \ , \ldots, x^{n_j-1} e^{\lambda_j x} \ .$$

Insgesamt erhalten wir dadurch ein Fundamentalsystem.

Ist $\lambda_j = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$ eine Nullstelle mit der Vielfachheit n_j , dann erhalten wir zum Paar $(\lambda_j, \overline{\lambda_j})$ die $2n_j$ linear unabhängigen Lösungen

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x) \ , \ xe^{\alpha x}\cos(\beta x) \ , \ldots, \ x^{n_j-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

$$e^{\alpha x}\sin(\beta x) \ , \ xe^{\alpha x}\sin(\beta x) \ , \ldots, \ x^{n_j-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

....

Inhomogene lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Zur inhomogenen Dgl. $L[y] = s(x)$ haben wir die zugehörige homogene Dgl. $L[y] = 0$.

Satz. Ist $y_H(x)$ die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Dgl. und $y_I(x)$ eine spezielle (partikuläre) Lösung der inhomogenen Dgl., dann ist

$$y(x) = y_H(x) + y_I(x)$$

die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.

Bemerkung. Neben der Bestimmung eines Fundamentalsystems für die homogene Dgl. ist also **zumindest eine** spezielle Lösung der inhomogenen Dgl. zu finden.

Dafür gibt es die Möglichkeiten des "Erratens", spezieller Ansätze und das Verfahren der Variation der Konstanten.

Im folgenden betrachten wir diese Möglichkeiten nur für den Fall von linearen Dgl. mit konstanten Koeffizienten.

(a) Erraten

Gegeben sei $y'' + y = e^x$. Für die zugehörige homogene Dgl. $y'' + y = 0$ ergibt sich

$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i \quad , \quad y_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

Die rechte Seite ist $s(x) = e^x$, daher prüfen wir, ob eine "ähnliche" Funktion Lösung der inhomogenen Dgl. ist, und erhalten $y_I = \frac{1}{2}e^x$.

Folglich ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl. gegeben durch

$$y(x) = y_H(x) + y_I(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \tfrac{1}{2}e^x \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

(b) Spezielle Ansätze

Hat die rechte Seite $s(x)$ eine spezielle Gestalt, dann kann als Ansatz eine "ähnliche" Funktion mit unbestimmten Koeffizienten gewählt werden (z.B. für $s(x) = 1 + x$ kann man den Ansatz $y_I = b_0 + b_1 x$ wählen). Die vorerst unbestimmten Koeffizienten werden dann mittels Koeffizientenvergleich spezifiziert.

Ist $s(x)$ eine Linearkombination von Funktionen, dann sind für die einzelnen Funktionen die entsprechenden Ansätze zu wählen.

Im folgenden werden einige typische Ansätze erwähnt.

Störfunktion $s(x)$	Zugehöriger Ansatz für $y_I(x)$
a(const.)	b(const.)
$a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$	$b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$
$ae^{\lambda x}$	$be^{\lambda x}$
$a \sin(mx)$ $a \cos(mx)$ $a \sin(mx) + b \cos(mx)$	$c \sin(mx) + d \cos(mx)$
$ae^{\lambda x} \sin(mx)$ $ae^{\lambda x} \cos(mx)$ $e^{\lambda x}(a \sin(mx) + b \cos(mx))$	$e^{\lambda x}(c \sin(mx) + d \cos(mx))$
$e^{\lambda x} P(x)$	$e^{\lambda x} Q(x)$
$P(x) \sin(mx)$ $P(x) \cos(mx)$	$Q(x) \sin(mx) + R(x) \cos(mx)$
mit $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$	$Q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ $R(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_m x^m$

Bemerkung. Sind additive Anteile der Störfunktion $s(x)$ (und in manchen Fällen auch multiplikative Anteile) eine Lösung der zugehörigen homogenen Dgl. $L[y] = 0$, dann spricht man von **äußerer Resonanz** .

In diesem Fall ist der entsprechende Ansatz für $y_I(x)$ noch mit dem Faktor x zu multiplizieren.

Beispiel. Für $y'' - y = e^x + x$ ist $y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

Wir beobachten, dass $s_1(x) = e^x$ Lösung der homogenen Dgl. ist, hingegen ist $s_2(x) = x$ keine Lösung der homogenen Dgl.

Der "übliche" Ansatz wäre $y_I(x) = Ae^x + B + Cx$.

Damit $y_I'(x) = Ae^x + C$, $y_I''(x) = Ae^x$.

Eingesetzt in die Dgl. ergibt sich $-B - Cx = e^x + x$. Diese Gleichung ist **nicht** identisch erfüllbar, daher funktioniert dieser Ansatz nicht.

Der korrekte Ansatz ist $y_I(x) = Axe^x + B + Cx$.

Dann ist $y_I'(x) = Ae^x + Axe^x + C \quad , \quad y_I''(x) = 2Ae^x + Axe^x$.

Eingesetzt in die Dgl. ergibt sich $2Ae^x - B - Cx = e^x + x \quad \Rightarrow$

$A = \frac{1}{2}$, $B = 0$, $C = -1$. Also $y_I(x) = \frac{1}{2}xe^x - x$.

Bemerkung. Liegt zusätzlich zur äußeren Resonanz noch **innere Resonanz** vor (d.h. λ ist k-fache Nullstelle), dann ist der entsprechende Ansatz mit x^k zu multiplizieren (siehe Beispiele).

(c) Variation der Konstanten

Wir betrachten die Dgl. $y'' + a_1y' + a_2y = s(x)$, also $a_0 = 1$.

Sei $y_1(x), y_2(x)$ ein Fundamentalsystem von $L[y] = 0$ mit Wronski-Determinante $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$.

Dann ist $y_H = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$.

Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Dgl. zu bekommen, ersetzen wir die Konstanten C_1, C_2 durch Funktionen $C_1(x), C_2(x)$ und treffen den Ansatz

$$y_I(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

Da dieser Ansatz überbestimmt ist (wir suchen nur **eine** spezielle Lösung), können wir eine weitere Bedingung formulieren.

$y_I' = C_1'y_1 + C_1y_1' + C_2'y_2 + C_2y_2'$. Daraus fordern wir, dass

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \;\Rightarrow\; y_I' = C_1y_1' + C_2y_2' \;\Rightarrow\; y_I'' = C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2''$$

Eingesetzt in die Dgl. ergibt sich ein Gleichungssystem für die unbekannten Funktionen $C_1'(x)$ und $C_2'(x)$, nämlich

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \quad , \quad C_1'y_1' + C_2'y_2' = s(x)$$

Die CRAMER'sche Regel liefert dann

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ s(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{-s(x)y_2(x)}{W(x)} \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\int \frac{s(x)y_2(x)}{W(x)}dx$$

$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & s(x) \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{s(x)y_1(x)}{W(x)} \quad \Rightarrow \quad C_2 = \int \frac{s(x)y_1(x)}{W(x)} dx$$

Beispiel. Man löse $y'' - y = e^x$ mittels Variation der Konstanten.

$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad y_H(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2$$

$C_1(x) = -\int \frac{e^x e^{-x}}{-2} dx = \frac{x}{2} \quad , \quad C_2(x) = \int \frac{e^x e^x}{-2} dx = -\frac{1}{4} e^{2x}$

Damit $\quad y_I(x) = \frac{x}{2} e^x - \frac{1}{4} e^{2x} e^{-x} = (\frac{x}{2} - \frac{1}{4}) e^x \quad$ und weiters

$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + (\frac{x}{2} - \frac{1}{4}) e^x = \widetilde{C_1} e^x + C_2 e^{-x} + \frac{x}{2} e^x \quad , \ \widetilde{C_1}, C_2 \in \mathbb{R}$

. . . .

Die EULER'sche Differentialgleichung

Diese hat die Form

$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 x y' + a_0 y = 0 \quad , \ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$

Durch die Substitution

$|x| = e^t \ , \ t = \ln|x|$, wobei $x \neq 0$,

kann die Euler'sche Differentialgleichung auf eine lineare Dgl. mit konstanten Koeffizienten zurückgeführt werden. Die Lösung der Euler'schen Dgl. ergibt sich dann durch Rücksubstitution.

$y(x) = v(t) = v(t(x))$

$y'(x) = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \dot{v} \quad \Rightarrow \quad x y' = \dot{v}$

$y''(x) = -\frac{1}{x^2} \dot{v} + \frac{1}{x} \frac{d\dot{v}}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2} (\ddot{v} - \dot{v}) \quad \Rightarrow \quad x^2 y'' = \ddot{v} - \dot{v}$

$y'''(x) = -\frac{2}{x^3} (\ddot{v} - \dot{v}) + \frac{1}{x^2} \frac{d(\ddot{v} - \dot{v})}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^3} (\dddot{v} - 3\ddot{v} + 2\dot{v}) \quad \Rightarrow$

$x^3 y''' = \dddot{v} - 3\ddot{v} + 2\dot{v} \quad$ etc.

. . . .

Numerisches Lösen von Differentialgleichungen

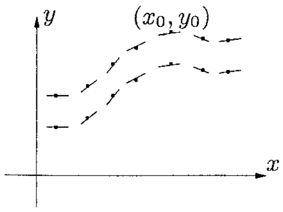
Unter einem **Anfangswertproblem (AWP)** versteht man eine Kombination aus Dgln. und sogenannten "Anfangsbedingungen".

Einfachstes Beispiel. $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$

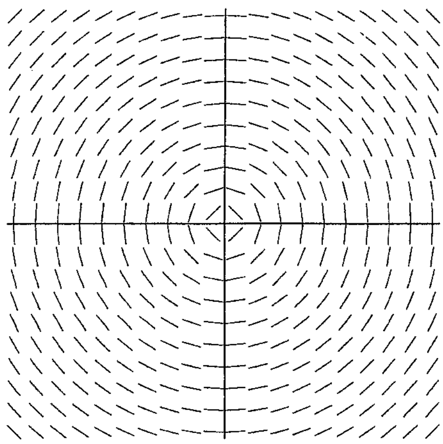
Hier ist eine Lösung der Dgl. gesucht, welche durch den Punkt (x_0, y_0) geht, bzw. welche zum Anfangswert x_0 den Funktionswert y_0 besitzt.

Da in einem Punkt (x_0, y_0) die Steigung der Lösungskurve durch diesen Punkt durch $y' = f(x_0, y_0)$ bestimmt ist, kann man versuchen, Lösungskurven grafisch zu zeichnen.

Man spricht von einem **Richtungsfeld**, das aus den **Linienelementen** $(x_0, y_0, y'(x_0, y_0))$ besteht.



Beispiel. Die Differentialgleichung $y' = -\frac{x}{y}$, welche die allgemeine Lösung $x^2 + y^2 = C$ besitzt, hat folgendes Richtungsfeld.

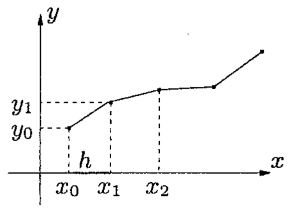


Das **EULER'sche Polygonzugverfahren** ist ein Rekursionsverfahren zur Ermittlung von Näherungspunkten. Ausgehend von einem Startpunkt (x_0, y_0) und **Schrittweite** h ermittelt man die Folgepunkte durch

$$x_1 = x_0 + h \quad , \quad y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

$$x_2 = x_1 + h \quad , \quad y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) \qquad \text{bzw. allgemein}$$

$$x_n = x_{n-1} + h \quad , \quad y_n = y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, y_{n-1}) \quad , \ n \geq 1$$



Es handelt sich dabei um ein **Verfahren erster Ordnung**, d.h. der Fehler wächst mit der Schrittweite, i.e. $|y_n - y(x_n)| \leq \text{const} \cdot h$.

Die **Methode nach RUNGE-KUTTA** ist ein Verfahren vierter Ordnung (i.e. $|y_n - y(x_n)| \leq \text{const} \cdot h^4$) und wird in der Praxis üblicherweise verwendet.

Das Verfahren läuft ähnlich dem EULER'schen Polygonzugverfahren, allerdings ermittelt man sich jeweils vier Hilfsgrößen, um den nächsten Näherungspunkt zu bestimmen.

Gegeben sei also das AWP $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$.

$$K_1^{(0)} = f(x_0, y_0)$$

$$K_2^{(0)} = f(x_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2} K_1^{(0)})$$

$$K_3^{(0)} = f(x_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2} K_2^{(0)})$$

$$K_4^{(0)} = f(x_0 + h, y_0 + h K_3^{(0)})$$

$$K^{(0)} = \tfrac{1}{6}(K_1^{(0)} + 2K_2^{(0)} + 2K_3^{(0)} + K_4^{(0)})$$

Daraus wird nun der erste Näherungspunkt bestimmt durch

$$x_1 = x_0 + h \quad , \quad y_1 = y_0 + h \cdot K^{(0)}$$

Daraus ergibt sich die allgemeine Rekursionsformel. Liegt der Punkt (x_n, y_n) vor, dann

$$K_1^{(n)} = f(x_n, y_n)$$

$$K_2^{(n)} = f(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2} K_1^{(n)})$$

$$K_3^{(n)} = f(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2} K_2^{(n)})$$

$$K_4^{(n)} = f(x_n + h, y_n + h K_3^{(n)})$$

$$K^{(n)} = \tfrac{1}{6}(K_1^{(n)} + 2K_2^{(n)} + 2K_3^{(n)} + K_4^{(n)})$$

Der nächste Punkt ist dann

$$x_{n+1} = x_0 + (n+1) \cdot h \quad , \quad y_{n+1} = y_n + h \cdot K^{(n)}$$

. . . .

Systeme von Differentialgleichungen

Wir betrachten ein System von n Gleichungen für Funktionen $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ der Form

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) \end{aligned}$$

(**System gewöhnlicher Dgl. 1. Ordnung**)

Vektorschreibweise: $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, t)$ wobei

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{f}(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n, t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n, t) \end{pmatrix}$$

Ein zugehöriges **Anfangswertproblem (AWP)** lautet

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, t) \quad , \ \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$$

Satz. Sind alle Komponenten von $\vec{f}(\vec{x}, t)$ stetig differenzierbar, dann ist das AWP eindeutig lösbar.

Bemerkung. Kommt auf der rechten Seite die Variable t explizit nicht vor, d.h. ist $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$, dann heisst das System **autonom**.

Beispiel. Ein Teilchen im Kraftfeld einer grossen Masse.
Gesucht ist die Gleichung der Bahnkurve, die den Ort des Teilchens zum Zeitpunkt t angibt.

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \quad \ldots \text{ Parameterdarstellung der Bahnkurve}$$

$$\dot{\vec{x}} = \tfrac{d}{dt}\vec{x}(t) \quad \ldots \text{ Geschwindigkeit}$$

$$\ddot{\vec{x}} = \tfrac{d^2}{dt^2}\vec{x}(t) \quad \ldots \text{ Beschleunigung}$$

Das NEWTON'sche Gesetz besagt: Kraft = Masse $\times$ Beschleunigung

Mit dem Kraftfeld $\vec{K}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} P(\vec{x}) \\ Q(\vec{x}) \\ R(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x_1, x_2, x_3) \\ Q(x_1, x_2, x_3) \\ R(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix}$

ergibt sich somit $\vec{K} = m\ddot{\vec{x}}$ bzw.

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= P(x_1, x_2, x_3) \\ m\ddot{x}_2 &= Q(x_1, x_2, x_3) \\ m\ddot{x}_3 &= R(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

Dies ist ein System von drei Dgln. zweiter Ordnung für die unbekannten Funktionen $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$, welches durch die Substitutionen $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = v$, $\dot{x}_3 = w$ in ein System von sechs Dgln. 1. Ordnung übergeführt werden kann (für die unbekannten Funktionen x_1, x_2, x_3, u, v, w) , nämlich

$$\begin{aligned} m\dot{u} &= P(x_1, x_2, x_3) \\ m\dot{v} &= Q(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

$$m\dot{w} = R(x_1, x_2, x_3)$$
$$\dot{x}_1 = u$$
$$\dot{x}_2 = v$$
$$\dot{x}_3 = w$$

. . . .

Lineare Systeme

Definition. Ein System der Form $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}$ bzw.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\
\dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + \ldots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= a_{n1}(t)x_1 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t)
\end{aligned}$$

heisst ein **lineares System** von Dgln. Ist $\vec{b} = \vec{0}$, dann heisst das System **homogen**, ansonsten **inhomogen** .

Sind alle Elemente der Matrix A reelle (oder komplexe) Konstanten, spricht man von einem System mit konstanten Koeffizienten.

Bemerkung. Eine lineare Dgl. n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)\dot{y} + a_0(t)y = s(t)$$

für die Funktion $y = y(t)$ kann in ein System von n Dgln. 1. Ordnung übergeführt werden.

Setze

$$x_1 = y \ , \ x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1 \ , \ x_3 = \ddot{y} = \dot{x}_2 \ , \ \ldots \ , x_n = y^{(n-1)} = \dot{x}_{n-1}$$

Dann erhält man

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n \\
\dot{x}_n &= -a_0x_1 - a_1x_2 - \ldots - a_{n-1}x_n + s(t)
\end{aligned}$$

Beispiel. $\dddot{y} + t^2\ddot{y} + \cos t \cdot \dot{y} + e^t y = \sin t$

Mit $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = \ddot{y}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
\dot{x}_3 &= -e^t x_1 - \cos t \cdot x_2 - t^2 x_3 + \sin t \quad \text{bzw.}
\end{aligned}$$

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -e^t & -\cos t & -t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Satz. Sei ein homogenes System $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ gegeben ($A \ldots n \times n$ Matrix).

Dann bildet die Lösungsgesamtheit einen n-dimensionalen Vektorraum, d.h. es gibt n linear unabhängige Lösungen $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_n$ (ein **Fundamentalsystem**), sodass jede Lösung als Linearkombination dieser Basislösungen dargestellt werden kann, i.e.

$$\vec{x} = C_1\vec{y}_1 + C_2\vec{y}_2 + \ldots + C_n\vec{y}_n \quad , \quad C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R} \ .$$

Damit ist die Summe von zwei Lösungen wieder eine Lösung, und das skalare Vielfache einer Lösung ist wieder eine Lösung.

Satz. Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{s}$ ist

$$\vec{x} = \vec{x}_h + \vec{x}_p \ ,$$

wobei $\vec{x}_h$ die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ ist, und $\vec{x}_p$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems.

Beweis. Sei $\vec{x}$ eine beliebige Lösung des inhomogenen Systems. Setze $\vec{z} = \vec{x} - \vec{x}_p$. Dann ist

$$\dot{\vec{z}} = \dot{\vec{x}} - \dot{\vec{x}}_p = A\vec{x} + \vec{s} - (A\vec{x}_p + \vec{s}) = A(\vec{x} - \vec{x}_p) = A\vec{z} \text{ , d.h.}$$

$\vec{z}$ ist eine Lösung des homogenen Systems. $\square$

. . . .

Homogene lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Sei also $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$, wobei A eine konstante Matrix ist.

Wir wählen einen Exponentialansatz der Form $\vec{x} = \vec{C}e^{\lambda t}$, $\vec{C}$ ein konstanter Vektor.

$\dot{\vec{x}} = \lambda\vec{C}e^{\lambda t} \;\Rightarrow\; \lambda\vec{C}e^{\lambda t} = A\vec{C}e^{\lambda t} \;\Rightarrow\; \lambda\vec{C} = A\vec{C} \;\Rightarrow\; (A - \lambda I)\vec{C} = \vec{0}$

Dies bedeutet (siehe Mathematik 1):

Ist λ ein **Eigenwert** von A und $\vec{C}$ ein zugehöriger **Eigenvektor**, dann ist $\vec{x} = \vec{C}e^{\lambda t}$ eine Lösung des homogenen Systems.

Die Eigenwerte von A sind bekanntlich die Lösungen der Gleichung $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$P_n(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

ist ein Polynom vom Grad n mit reellen Koeffizienten (**charakteristisches Polynom**).

Ziel ist es, n linear unabhängige Lösungen zu finden. Daher unterscheiden wir zwei Fälle.

Fall a) Es gibt n **verschiedene** Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

Zu jedem Eigenwert λ_i wählen wir einen zugehörigen Eigenvektor $\vec{v}_i$.

Die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ sind dann linear unabhängig, und wir gewinnen ein Fundamentalsystem

$$\vec{y}_1 = \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} \;,\; \vec{y}_2 = \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t} \;, \ldots \;,\; \vec{y}_n = \vec{v}_n e^{\lambda_n t}$$

Die allgemeine Lösung ist damit $\vec{x}(t) = C_1\vec{y}_1 + C_2\vec{y}_2 + \ldots + C_n\vec{y}_n$, wobei $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$.

Fall b) Es gibt Eigenwerte, die mehrfach auftreten

Seien diese $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ mit Vielfachheiten $k_1, \ldots, k_r$ $(k_1 + \ldots + k_r = n)$.

• Gibt es **zu jedem Eigenwert** λ_i mit der Vielfachheit k_i auch k_i linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{v}_{i,1}$, $\vec{v}_{i,2}$, ... , $\vec{v}_{i,k_i}$, dann erhalten wir ein Fundamentalsystem durch

$$
\begin{array}{l}
\vec{v}_{1,1}e^{\lambda_1 t} \ , \ \vec{v}_{1,2}e^{\lambda_1 t} \ , \ldots , \ \vec{v}_{1,k_1}e^{\lambda_1 t} \\
\vec{v}_{2,1}e^{\lambda_2 t} \ , \ \vec{v}_{2,2}e^{\lambda_2 t} \ , \ldots , \ \vec{v}_{2,k_2}e^{\lambda_2 t} \\
\qquad \ldots \\
\vec{v}_{r,1}e^{\lambda_r t} \ , \ \vec{v}_{r,2}e^{\lambda_r t} \ , \ldots , \ \vec{v}_{r,k_r}e^{\lambda_r t}
\end{array}
$$

Die allgemeine Lösung ist dann wieder eine Linearkombination dieser Fundamentallösungen.

• Gibt es zu einem Eigenwert λ_i mit Vielfachheit k_i **weniger** als k_i linear unabhängige Eigenvektoren, so findet man dazu k_i linear unabhängige Lösungen der Form

$$\vec{x}_j = \vec{P}_j(t)e^{\lambda_i t} \quad , \ j = 1, \ldots, k_i$$

Dabei sind die $\vec{P}_j(t)$ Vektoren, deren Komponenten jeweils Polynome vom Grad $< k_i$ sind.

Konkret: Sei λ ein Eigenwert mit Vielfachheit k , zu dem es weniger als k linear unabhängige Eigenvektoren gibt. Sei $\vec{c}$ ein Eigenvektor zu λ .

Mit Hilfe der folgenden Ansätze werden die erforderlichen Lösungen ermittelt.

$$
\begin{array}{l}
\vec{x}_1(t) = \vec{c}e^{\lambda t} \\
\vec{x}_2(t) = (\vec{a}_1 + t\vec{c})e^{\lambda t} \\
\vec{x}_3(t) = (\vec{a}_1^* + t\vec{a}_2 + t^2\vec{c})e^{\lambda t} \\
\qquad \ldots \\
\vec{x}_k(t) = \ldots
\end{array}
$$

. . . .

Inhomogene lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

Sei $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}$ gegeben.

Enthält die Störfunktion $\vec{b}(t)$ in ihren Komponenten geeignete Funktionen, so kann eine spezielle Lösung $\vec{x}_p$ durch einen entsprechenden Ansatz (analog wie im Falle linearer Dgln. n-ter Ordnung) gefunden werden.

Zu beachten: Dabei ist auch bei Auftreten einer dieser Funktionen in nur **einer** Komponente von $\vec{b}(t)$ der entsprechende Ansatz in **allen** Komponenten von $\vec{x}_p$ zu treffen.