LAPLACE–Transformation

Bei der LAPLACE-Transformation wird einer (geeigneten) Funktion $f(t)$ eine Funktion $F(s)$ zugeordnet. Diese Art von Transformation hat u.a. Anwendungen bei gewissen Fragestellungen bei gewöhnlichen als auch partiellen Differentialgleichungen.

Wir werden später sehen, welche Funktionen $f(t)$ "geeignet" sind.

Definition. Sei $f(t)$ gegeben. Die **LAPLACE-Transformierte** $F(s)$ von $f(t)$ ist definiert durch

$$\mathcal{L}\{f(t)\} \equiv F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \quad , \; s > 0$$

Bemerkungen.

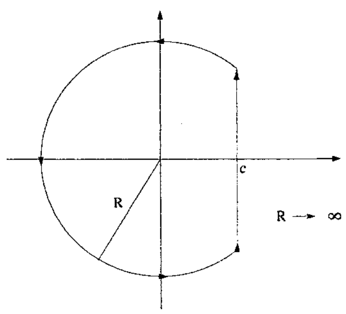
(a) Das uneigentliche Integral muss existieren!

(b) s heißt die Transformationsvariable.

(c) Die Umkehrtransformation $\mathcal{L}^{-1}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st}ds = \begin{cases} f(t) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Dabei wird c so gewählt, dass in der komplexen Zahlenebene alle singulären Punkte des Integranden **links** von der Geraden $x = c$ liegen.



(d) In der Praxis werden geeignete Tabellen und Eigenschaften der LAPLACE-Transformation zur Bestimmung der inversen LAPLACE-Transformierten verwendet.

Beispiel. $f(t) = c \quad \ldots \text{const.}$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int\limits_0^\infty ce^{-st}dt = c \cdot \tfrac{-1}{s} \cdot e^{-st} \,\Big|_0^\infty = -\tfrac{c}{s}(0-1) = \tfrac{c}{s}$$

Beispiel. $f(t) = t$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int\limits_0^\infty te^{-st}dt = -\tfrac{t}{s} \cdot e^{-st} \,\Big|_0^\infty + \tfrac{1}{s}\int\limits_0^\infty e^{-st}dt =$$

$$= 0 + \tfrac{1}{s}\int\limits_0^\infty e^{-st}dt = -\tfrac{1}{s^2}e^{-st} \,\Big|_0^\infty = \tfrac{1}{s^2}$$

Beispiel. $f(t) = t^\alpha \quad , \ \alpha > 0$

$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int\limits_0^\infty t^\alpha e^{-st}dt$. Mit der Substitution $st = \xi$ erhalten wir

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\} = \tfrac{1}{s^{\alpha+1}}\int\limits_0^\infty e^{-\xi}\xi^\alpha d\xi = \tfrac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$$

(wobei $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ die Gammafunktion bezeichnet).

Speziell: $\alpha = n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}\{t^n\} = \tfrac{n!}{s^{n+1}}$

Beispiel. $f(t) = e^{at} \quad , \ a \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int\limits_0^\infty e^{at}e^{-st}dt = \int\limits_0^\infty e^{-(s-a)t}dt = -\tfrac{1}{s-a}e^{-(s-a)t} \,\Big|_0^\infty = \tfrac{1}{s-a} \quad \text{für} \quad s > a \ .$$

Beispiel. $f(t) = \sin \omega t \quad , \ \omega \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = F(s) = \int\limits_0^\infty \sin \omega t \cdot e^{-st}dt$$

Partielle Integration mit $u = \sin \omega t$, $v' = e^{-st}$, $u' = \omega \cos \omega t$, $v = -\frac{1}{s} e^{-st}$ liefert

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = F(s) = -\frac{\sin \omega t}{s} e^{-st} \Big|_0^\infty + \frac{\omega}{s} \int\limits_0^\infty \cos \omega t \cdot e^{-st} dt \; (= \frac{\omega}{s} \mathcal{L}\{\cos \omega t\})$$

Partielle Integration mit $u = \cos \omega t$, $v' = e^{-st}$, $u' = -\omega \sin \omega t$, $v = -\frac{1}{s} e^{-st}$ liefert

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = F(s) = \frac{\omega}{s} (-\frac{1}{s} \cos \omega t \cdot e^{-st} \Big|_0^\infty - \frac{\omega}{s} \int\limits_0^\infty \sin \omega t \cdot e^{-st} dt) =$$

$$= \frac{\omega}{s} (\frac{1}{s} - \frac{\omega}{s} F(s)) = \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2} F(s)$$

Aus $F(s) = \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2} F(s)$ folgt dann $F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$.

Beispiel. $f(t) = \cos \omega t$, $\omega \in \mathbb{R}$

Siehe vorher $\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s} \mathcal{L}\{\cos \omega t\}$. Damit $\mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$.

Definition. Eine Funktion $f(t)$ ist von **exponentieller Ordnung** (für $t \to \infty$), falls Konstanten $a, T > 0$ existieren, sodass $e^{-at} f(t)$ beschränkt ist für $t > T$, d.h.

$\exists\, M > 0$ sodass $|f(t)| \leq M e^{at}$ für $t > T$.

Schreibweise: $f(t) = \mathcal{O}(e^{at})$ für $t \to \infty$

Bemerkung. Die Funktionen t^k , $\sin bt$, $\cos bt$, e^{at} sind von exponentieller Ordnung. Des weiteren sind Produkte von Funktionen von exponentieller Ordnung wieder von exponentieller Ordnung.

Satz. Ist $f(t)$ stückweise stetig im Intervall $[0, T]$ und von exponentieller Ordnung für $t > T$, dann existiert die Laplace-Transformierte von $f(t)$ für $s > a$.

Beweis. $\int\limits_0^T f(t) e^{-st} dt$ existiert, weil $f(t)$ im Intervall $[0, T]$ stückweise stetig ist.

$\int\limits_T^\infty f(t)e^{-st}dt$ existiert, weil dort der Integrand durch $Me^{-(s-a)t}$ nach oben abgeschätzt werden kann und $\int\limits_T^\infty e^{-(s-a)t}dt$ für $s > a$ existiert. $\square$

Definition. Die **HEAVISIDE-Funktion** ist definiert durch

$$H(t-b) = \begin{cases} 1 & t \geqslant b \\ 0 & t < b \end{cases}$$

Folglich ist $H(t-b)g(t) = \begin{cases} g(t) & t \geqslant b \\ 0 & t < b \end{cases}$

Satz. Sei $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$.

1) $\mathcal{L}\{\lambda f(t) + \mu g(t)\} = \lambda\mathcal{L}\{f(t)\} + \mu\mathcal{L}\{g(t)\} \quad , \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

2) $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$

3) $\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c}F(\frac{s}{c})$

4) $\mathcal{L}\{H(t-b)f(t-b)\} = e^{-bs}F(s) \quad , \quad b \geq 0$

Beispiel. $\mathcal{L}\{t^2\} = F(s) = \frac{2}{s^3}$. Damit ist $\mathcal{L}\{e^{-t}t^2\} = F(s+1) = \frac{2}{(s+1)^3}$.

Beispiel. $\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = F(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$. Damit ist
$\mathcal{L}\{e^{-2t}\sin \omega t\} = F(s+2) = \frac{\omega}{(s+2)^2+\omega^2}$

Beispiel. $\mathcal{L}\{\sinh t\} = \mathcal{L}\{\frac{1}{2}(e^t - e^{-t})\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^t\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-t}\} =$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{1}{s^2-1}$

Satz. (Differentiation)

Sei f stetig, f' stückweise stetig in $[0, T]$ und $f(t) = \mathcal{O}(e^{at})$ für $t \to \infty$. Dann gilt

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \; .$$

Beweis. $\mathcal{L}\{f(t)\} = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}dt$. Partielle Integration mit

$u = f(t)$, $v' = e^{-st}$, $u' = f'(t)$, $v = -\frac{1}{s}e^{-st}$ liefert

$\mathcal{L}\{f(t)\} = -\frac{1}{s}f(t)e^{-st}\,|_0^\infty + \frac{1}{s}\int\limits_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \frac{1}{s}f(0) + \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f'(t)\}$. $\square$

Folgerung. $\mathcal{L}\{f''(t)\} = \mathcal{L}\{\frac{d}{dt}f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) =$
$= s(s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)) - f'(0) = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$ und allgemein
$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$

Satz. (Integration)

Ist $F(s)$ die LAPLACE-Transformierte von $f(t)$, dann gilt

$$\mathcal{L}\{\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\} = \frac{F(s)}{s} \; .$$

Im folgenden wenden wir die Laplace-Transformation auf Anfangswertprobleme bei gewöhnlichen Dgln. an. Dabei wird das AWP in ein algebraisches Problem übergeführt. Kann das algebraische Problem gelöst werden, dann erhalten wir durch Rücktransformation die Lösung des AWP.

. . . .

Der Faltungssatz

Definition. Die Funktion

$$(f * g)(t) = \int\limits_0^t f(t-\xi)g(\xi)d\xi$$

heißt (endliche) **Faltung** der Funktionen f und g .

Dabei gelten folgende **Rechengesetze** :

1) $f * g = g * f$

2) $f * (g * h) = (f * g) * h$

3) $f * (g + h) = f * g + f * h$

Beispiel. Die Faltung ist **nicht** das Produkt der Funktionen!

Sei $f(t) = g(t) = t$.

$$(f * g)(t) = \int_0^t (t - \xi)\xi d\xi = \int_0^t (t\xi - \xi^2)d\xi = (\tfrac{t}{2}\xi^2 - \tfrac{\xi^3}{3})\,\big|_0^t = \tfrac{t^3}{6}$$

$$(f \cdot g)(t) = f(t) \cdot g(t) = t^2$$

Satz. (Faltungssatz)

Sei $F = \mathcal{L}\{f\}$ und $G = \mathcal{L}\{g\}$. Dann gilt

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\} = F \cdot G \quad , \quad \mathcal{L}^{-1}\{F \cdot G\} = f * g$$

Beweis.

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \int_0^\infty e^{-st}(\int_0^t f(t - \xi)g(\xi)d\xi)dt = \int_{t=0}^\infty \int_{\xi=0}^t e^{-st}f(t - \xi)g(\xi)d\xi dt$$

Der Integrationsbereich in der $t\xi$-Ebene kann auch anders beschrieben werden, damit

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \int_{\xi=0}^\infty \int_{t=\xi}^\infty e^{-st}f(t - \xi)g(\xi)d\xi dt = \int_{\xi=0}^\infty g(\xi)(\int_{t=\xi}^\infty e^{-st}f(t - \xi)dt)d\xi$$

Mit der Substitution $t - \xi = \eta$, $dt = d\eta$ erhalten wir

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \int_{\xi=0}^\infty g(\xi)(\int_{\eta=0}^\infty e^{-s(\eta+\xi)}f(\eta)dt)d\eta =$$

$$= \int_{\xi=0}^\infty g(\xi)e^{-s\xi}d\xi \cdot \int_{\eta=0}^\infty f(\eta)e^{-s\eta}d\eta = G(s) \cdot F(s) \quad \square$$

. . . .

Die DIRAC'sche Delta-Funktion

Wir betrachten zunächst für $\varepsilon > 0$, $h > 0$, $a \in \mathbb{R}^+$ die Funktion

$$p(t) = \begin{cases} h & \text{falls } |t-a| < \varepsilon \\ 0 & \text{falls } |t-a| \geqslant \varepsilon \end{cases}$$

Ihre Laplace-Transformierte lautet

$$\mathcal{L}\{p(t)\} = \int\limits_0^\infty e^{-st} p(t) dt = \int\limits_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} e^{-st} h dt = -\tfrac{h}{s} e^{-st} \Big|_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} =$$

$$= -\tfrac{h}{s}\left(e^{-s(a+\varepsilon)} - e^{-s(a-\varepsilon)}\right) = -\tfrac{h}{s} e^{-as}\left(e^{-s\varepsilon} - e^{s\varepsilon}\right) = \tfrac{2h}{s} e^{-as} \sinh s\varepsilon$$

Jetzt wählt man speziell $h = \frac{1}{2\varepsilon}$ und erhält für die Funktion

$$p_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} & \text{falls } |t-a| < \varepsilon \\ 0 & \text{falls } |t-a| \geqslant \varepsilon \end{cases}$$

die Relation $\quad I_\varepsilon = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\varepsilon(t) dt = \int\limits_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} dt = 1$

Definition. Für $\varepsilon \to 0$ ergibt sich daraus die sogenannte **Dirac'sche Delta-Funktion** $\delta(t-a)$ mit den Eigenschaften

$$\delta(t-a) = 0 \quad \text{für } t \neq a \qquad \text{und} \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) dt = 1$$

Bemerkung. Die Dirac'sche Delta-Funktion ist keine Funktion im üblichen Sinne.

Die Laplace-Transformierte ist definiert durch

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{L}\{p_\varepsilon(t)\} = \lim_{\varepsilon \to 0} \tfrac{1}{\varepsilon s} e^{-as} \sinh \varepsilon s = e^{-as}$$

Speziell für $a = 0$ erhalten wir $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$.

Beispiel. Betrachte $y'' + 2y' + 5y = \delta(t-1) \quad , \; y(0) = y'(0) = 0$

Sei $\varphi(t)$ Lösung und $\mathcal{L}\{\varphi(t)\} = \Phi(s)$. Dann ist

$\mathcal{L}\{\varphi'(t)\} = s\Phi(s) - \varphi(0) \quad$ und $\quad \mathcal{L}\{\varphi''(t)\} = s^2\Phi(s) - s\varphi(0) - \varphi'(0)$.

Damit erhalten wir $\quad s^2\Phi(s) + 2s\Phi(s) + 5\Phi(s) = e^{-s} \quad$ bzw.

$\Phi(s) = \frac{e^{-s}}{s^2+2s+5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(s+1)^2+4} e^{-s}$

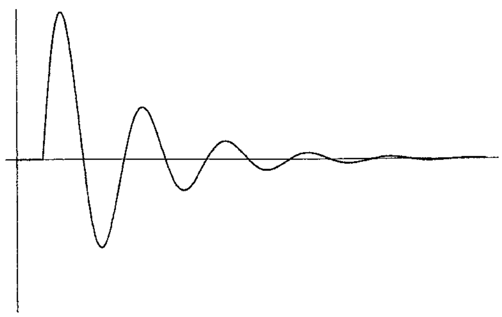
Aus den Beziehungen

$\mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad , \quad \mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a) \quad$ und

$\mathcal{L}\{H(t-b) f(t-b)\} = e^{-bs} F(s) \quad$ folgt nun

$\varphi(t) = \frac{1}{2} H(t-1) e^{-(t-1)} \sin 2(t-1)$

Diese Differentialgleichung beschreibt etwa die Schwingung eines gedämpften Pendels, das für $\; 0 \leq t < 1 \;$ in Ruhe ist, zum Zeitpunkt $\; t = 1 \;$ einen "Schlag" bekommt und dann wieder ohne weitere äußere Einwirkung gedämpft weiterschwingt.



Bemerkung. Für das Produkt einer beliebigen stetigen Funktion $f(t)$ mit der δ-Funktion gilt

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)dt = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) p_\varepsilon(t) dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon} f(t) dt =$$

$$\overset{MWS}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\varepsilon} 2\varepsilon f(t^*) = f(a)$$