

02. Numerisches Rechnen

Die LR -Zerlegung

Definition. Für eine Matrix $A \in M(m \times n)$ und $k = 1, \dots, \min(m, n)$ wird mit $A_k \in M(k \times k)$ die linke obere Teilmatrix von A bezeichnet. $\det A_k$ sind dann die einzelnen **Hauptminoren**.

Satz. (LR -Zerlegung ohne Zeilenvertauschungen)

Sind alle Hauptminoren von $A \in M(m \times n)$ ungleich Null, dann besitzt A eine LR -Zerlegung, d.h. A kann als Produkt einer linken unteren Dreiecksmatrix L und einer rechten oberen Dreiecksmatrix R dargestellt werden:

$$A = L \cdot R$$

Dabei ist

- $R \in M(m \times n)$ die Matrix in Zeilenstufenform, die aus A durch elementare Zeilenumformungen (ohne Zeilenvertauschungen!) entstanden ist,
- $L \in M(m \times m)$ die quadratische Matrix, die man erhält, wenn man in der Hauptdiagonalen jeweils 1 einträgt und in die Spalten darunter jeweils die negativen Faktoren, die beim Gauß'schen Verfahren notwendig waren, um A in die Zeilenstufenform überzuführen. \square

Sind beim Gauß'schen Verfahren allerdings Zeilenvertauschungen erforderlich, ist die Zerlegung zu modifizieren.

Satz. (LR -Zerlegung mit Zeilenvertauschungen)

Jede reguläre Matrix $A \in M(n \times n)$ kann zerlegt werden in ein Produkt der Gestalt

$$A = P^t L R \quad (\Leftrightarrow PA = LR)$$

Dabei ist

- R jene Matrix in Zeilenstufenform, die aus A durch elementare Zeilenumformungen (einschließlich Zeilenvertauschungen) entsteht,
- L eine quadratische linke untere Dreiecksmatrix, in deren Hauptdiagonalen nur 1 stehen. Nach jedem Schritt im Gauß'schen Verfahren trägt man die negativen Faktoren, die notwendig waren, in die Spalten einer Matrix L^* unterhalb der 1 ein.

Bei jeder Zeilenvertauschung werden die Elemente in den entsprechenden Zeilen von L^* , die bisher bestimmt wurden und links von 1 stehen, vertauscht. Daraus ergibt sich zum Schluß die Matrix L .

- Die Matrix P (mit der Eigenschaft $P^t = P^{-1}$ erhält man dadurch, dass man die Zeilen der n -reihigen Einheitsmatrix in derselben Weise vertauscht, wie es beim Gauß'schen Verfahren notwendig war. P heisst die zugehörige **Permutationsmatrix**.

Die vorangegangenen Aussagen können für das Lösen von Gleichungssystemen der Form $A\vec{x} = \vec{b}$ verwendet werden.

Gilt $A = L \cdot R$, so erhalten wir $L \cdot R \cdot \vec{x} = \vec{b}$, und damit (mit $\vec{y} = R \cdot \vec{x}$) die beiden Gleichungssysteme

$$L\vec{y} = \vec{b} \quad \text{und} \quad R\vec{x} = \vec{y}$$

die jeweils durch Rücksubstitution zu behandeln sind (von oben nach unten bzw. von unten nach oben).

Gilt $A = P^t \cdot L \cdot R$, so erhalten wir $P^t \cdot L \cdot R \cdot \vec{x} = \vec{b}$ bzw.

$P \cdot P^t \cdot L \cdot R \cdot \vec{x} = L \cdot R \cdot \vec{x} = P \cdot \vec{b} = \vec{b}'$. Mit $\vec{y} = R \cdot \vec{x}$ erhalten wir damit die beiden Gleichungssysteme

$$L\vec{y} = \vec{b}' \quad \text{und} \quad R\vec{x} = \vec{y}.$$

Bemerkung. Zum Vergleich von Rechenaufwand bzw. Speicherplatzbedarf siehe Skriptum.

.....

Die QR-Zerlegung

Jede Matrix $A \in M(m \times n)$ mit $m \geq n$ und linear unabhängigen Spaltenvektoren kann in ein Produkt $Q \cdot R$ zerlegt werden, wobei Q eine Matrix mit orthogonalen Spaltenvektoren ist und R eine obere Dreiecksmatrix.

Diese Zerlegung findet Anwendung in der Approximation von Eigenwerten und dem näherungsweise Lösen von Gleichungssystemen.

Satz. Sei $A \in M(m \times n)$ mit $m \geq n$ und linear unabhängigen Spaltenvektoren. Dann gibt es eine Zerlegung $A = Q \cdot R$, wobei Q eine Matrix mit orthonormalen Spaltenvektoren ist und $R \in M(n \times n)$ eine invertierbare obere Dreiecksmatrix ist.

Das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt, angewandt auf die Spaltenvektoren von A , liefert die Matrix Q .

Zur Bestimmung von R betrachten wir die Relation $A = QR$. Daraus erhalten wir

$$Q^t A = Q^t Q R = I R = R \quad (I \dots \text{Einheitsmatrix})$$

.....

Iterative Methoden zur Lösung von linearen Gleichungssystemen

Will man ein System $A\vec{x} = \vec{b}$, $A \in M(n \times n)$ und regulär, mittels Gauß'schen Algorithmus bzw. LR-Zerlegung lösen, so wächst die Anzahl der erforderlichen Rechenschritte mit der dritten Potenz von n , was viel Rechenzeit kosten kann.

Ein weiterer Zugang besteht darin, "möglichst rasch" zu einer geeigneten Näherungslösung zu kommen. Man beginnt mit einem Startvektor \vec{x}_0 und arbeitet mit einer Vorschrift, wie man aus einem Vektor \vec{x}_k zu einem Vektor \vec{x}_{k+1} kommt. Die Folge (\vec{x}_k) der Approximationen soll dann gegen die Lösung konvergieren.

Zur Vorgangsweise: Man spaltet die Matrix A auf in die Summe von

zwei Matrizen $A = S - T$ und erhält $S\vec{x} = T\vec{x} + \vec{b}$.

Damit kann die Iteration formuliert werden

$$S\vec{x}_{k+1} = T\vec{x}_k + \vec{b}.$$

Dieser Weg muß allerdings nicht zielführend sein. Deshalb stellt man zwei weitere Bedingungen.

- Der Vektor \vec{x}_{k+1} soll leicht berechenbar sein. Deshalb soll S einfach aufgebaut und invertierbar sein.
- Die Folge (\vec{x}_k) soll gegen die wahre Lösung konvergieren.

Aus den Gleichungen $S\vec{x} = T\vec{x} + \vec{b}$ und $S\vec{x}_{k+1} = T\vec{x}_k + \vec{b}$ erhält man durch Subtraktion

$$S(\vec{x} - \vec{x}_{k+1}) = T(\vec{x} - \vec{x}_k)$$

Mit dem **Fehlervektor** $\vec{v}_k = \vec{x} - \vec{x}_k$ gilt also

$$S\vec{v}_{k+1} = T\vec{v}_k \quad \text{bzw.} \quad \vec{v}_k = S^{-1}T\vec{v}_{k-1} = \dots = (S^{-1}T)^k\vec{v}_0$$

Offensichtlich gilt $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x} \Leftrightarrow \vec{v}_k \rightarrow \vec{0}$.

Satz. Die vorher genannte Iteration ist genau dann konvergent, wenn für jeden Eigenwert λ von $S^{-1}T$ gilt, dass $|\lambda| < 1$.

$\rho(S^{-1}T) = \max |\lambda_i|$, λ_i EW von $S^{-1}T$ heißt der **Spektralradius** von $S^{-1}T$ und liefert ein Maß für die **Konvergenzrate** $r = -\log_{10} \rho$.

Bemerkung. Eine Möglichkeit besteht darin, aus den Hauptdiagonalelementen von A die Diagonalmatrix S zu bilden. Dann ist klarerweise $T = S - A$. Dies führt zur sogenannten

Jacobi-Iteration

Gegeben sei $A\vec{x} = \vec{b}$. Ist $(x_i)_k$ die i -te Komponente von \vec{x}_k , dann erhält man folgendes System

$$a_{11}(x_1)_{k+1} = -a_{12}(x_2)_k - \dots - a_{1n}(x_n)_k + b_1$$

⋮

$$a_{nn}(x_n)_{k+1} = -a_{n1}(x_1)_k - \dots - a_{n,n-1}(x_{n-1})_k + b_n$$

Ist $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \dots, n$, und ist A "dünn" besetzt (nur "wenige" Elemente von A sind ungleich Null), dann funktioniert die Jacobi-Iteration recht gut.

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Dann sind } S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Weiters ist } S^{-1}T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Mit } \vec{x}_k = \begin{pmatrix} v_k \\ w_k \end{pmatrix} \text{ gilt dann } 2v_{k+1} = w_k + b_1, \quad 2w_{k+1} = v_k + b_2.$$

Die Eigenwerte von $S^{-1}T$ sind $\lambda_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$, somit ist der Spektralradius $\rho = \frac{1}{2}$. Mit $r = -\log_{10} \rho \approx 0.3$ liegt eine gute Konvergenz vor. Der Fehler halbiert sich bei jedem Schritt, eine weitere Binärstelle wird korrekt.

Ein Nachteil des Verfahrens ist, dass bei großen Systemen immer der gesamte Vektor \vec{x}_k abgespeichert werden muss.

Gauss-Seidel-Iteration

Dabei verwendet man bei der Iteration jede Komponente des neu berechneten Vektors \vec{x}_{k+1} sobald sie ermittelt worden ist.

1. Gleichung (ist wie vorher)

$$a_{11}(x_1)_{k+1} = -a_{12}(x_2)_k - \dots - a_{1n}(x_n)_k + b_1$$

2. Gleichung (verwendet schon den neuen Wert von x_1)

$$a_{22}(x_2)_{k+1} = -a_{21}(x_1)_{k+1} - a_{23}(x_3)_k - \dots - a_{2n}(x_n)_k + b_2$$

⋮

n -te Gleichung

$$a_{nn}(x_n)_{k+1} = -a_{n1}(x_1)_{k+1} - a_{n2}(x_2)_{k+1} - \dots - a_{n,n-1}(x_{n-1})_{k+1} + b_n$$

Beispiel.

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}. \quad \text{Dann ist}$$

$$2v_{k+1} = w_k + b_1$$

$$2w_{k+1} = v_{k+1} + b_2 \quad \text{bzw.} \quad -v_{k+1} + 2w_{k+1} = b_2$$

$$\text{Damit} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}_k + \vec{b} \quad \text{und}$$

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^{-1}T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von $S^{-1}T$ sind $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{4}$, der Spektralradius ist somit $\rho = \frac{1}{4}$, die Konvergenzrate $r = -\log_{10} \rho \approx 0.6$.

Der Fehler wird bei jedem Schritt mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ multipliziert.

Bemerkung. Sei $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

und $\vec{x}_k = \begin{pmatrix} v_k \\ w_k \\ u_k \end{pmatrix}$. Dann erhalten wir

$$a_{11}v_{k+1} = -a_{12}w_k - a_{13}u_k + b_1$$

$$a_{22}w_{k+1} = -a_{21}v_{k+1} - a_{23}u_k + b_2, \quad a_{21}v_{k+1} + a_{22}w_{k+1} = -a_{23}u_k + b_2$$

$$a_{33}u_{k+1} = -a_{31}v_{k+1} - a_{32}w_{k+1} + b_3, \quad a_{31}v_{k+1} + a_{32}w_{k+1} + a_{33}u_{k+1} = b_3$$

$$\text{Damit sind} \quad S = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 0 & -a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definition. Eine Matrix $A \in M(n \times n)$ heisst **streng diagonal dominant (s.d.d.)**, wenn

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad \text{für } i = 1, \dots, n .$$

Es gilt:

- (i) Eine streng diagonal dominante Matrix ist invertierbar.
- (ii) Die Jacobi-Iteration und die Gauss-Seidel-Iteration für $A\vec{x} = \vec{b}$ konvergieren, wenn A streng diagonal dominant ist.

Zusammenfassung.

Wir zerlegen die Matrix A in 3 Summanden, $A = L + D + R$ mit

- L ist strikt untere Dreiecksmatrix (Diagonalelemente sind Null)
- R ist strikt obere Dreiecksmatrix (Diagonalelemente sind Null)
- D ist Diagonalmatrix

Die Jacobi-Iteration lautet dann in Matrizenschreibweise

$$D\vec{x}_{k+1} = -(L + R)\vec{x}_k + \vec{b}$$

Wegen der Voraussetzung $a_{ii} \neq 0$, $\forall i$ ist die Matrix D invertierbar, und damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{x}_{k+1} &= -D^{-1}(L + R)\vec{x}_k + D^{-1}\vec{b} = \\ &= T_J\vec{x}_k + D^{-1}\vec{b} \quad \text{mit } T_J = -D^{-1}(L + R) \dots \text{ Jacobi-Iterationsmatrix} \end{aligned}$$

Die Gauss-Seidel-Iteration lautet in Matrizenschreibweise

$$D\vec{x}_{k+1} = -L\vec{x}_{k+1} - R\vec{x}_k + \vec{b} \quad \text{bzw.} \quad (D + L)\vec{x}_{k+1} = -R\vec{x}_k + \vec{b}$$

Weil $D + L$ eine linke untere Dreiecksmatrix mit Diagonalelementen ungleich Null ist, ist $D + L$ invertierbar, also

$$\vec{x}_{k+1} = -(D + L)^{-1}R\vec{x}_k + (D + L)^{-1}\vec{b} =$$

$$= T_{GS}\vec{x}_k + (D + L)^{-1}\vec{b}$$

mit $T_{GS} = -(D + L)^{-1}R$... Gauss-Seidel-Iterationsmatrix

.....

Überbestimmte lineare Gleichungssysteme

Eine Matrix $A \in M(n \times n)$ mit linear unabhängigen Spaltenvektoren ist invertierbar, und jedes Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ ist eindeutig lösbar mit $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Ist $A \in M(m \times n)$ mit $m > n$ eine Matrix mit linear unabhängigen Spaltenvektoren, dann hat $A\vec{x} = \vec{b}$ i.a. keine Lösung.

Definition. Sei $A \in M(m \times n)$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Dann heisst $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ eine **Näherungslösung** (im quadratischen Mittel), oder Lösung nach der Methode der kleinsten Quadrate, oder **approximative Lösung** von $A\vec{x} = \vec{b}$, wenn

$$\|\vec{b} - A\bar{x}\| \leq \|\vec{b} - A\vec{x}\| \quad \text{für alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Nun gilt

Satz. Sei $A \in M(m \times n)$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Dann besitzt $A\vec{x} = \vec{b}$ stets mindestens eine approximative Lösung. Weiters gilt

- \bar{x} ist eine Näherungslösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ genau dann, wenn \bar{x} eine Lösung von $A^t A\vec{x} = A^t \vec{b}$ ist.
- A besitzt genau dann linear unabhängige Spaltenvektoren, wenn $A^t A$ invertierbar ist. In diesem Fall ist die Näherungslösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig bestimmt durch $\bar{x} = (A^t A)^{-1} A^t \vec{b}$.

Beispiel.

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Weil $\text{Rang} A = 2 \neq 3 = \text{Rang}(A, \vec{b})$, ist $A\vec{x} = \vec{b}$ nicht lösbar.

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 30 \end{pmatrix}$$

$$A^t \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 30 \end{pmatrix} \bar{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 16 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{8}{15} \end{pmatrix} \dots \text{Näherungslösung}$$

Definition. Sei $A \in M(m \times n)$ mit linear unabhängigen Spaltenvektoren. Dann heiſst

$$A^\# = (A^t A)^{-1} A^t$$

die **Pseudoinverse** von A . Es gilt $A^\# \in M(n \times m)$.

Beispiel. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}, \quad (A^t A)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^\# = (A^t A)^{-1} A^t = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 8 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Bemerkungen.

(a) $AA^\#A = A$

(b) $A^\#AA^\# = A^\#$

(c) $AA^\#$ und $A^\#A$ sind symmetrische Matrizen.

(d) Die Näherungslösung \bar{x} des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ kann angegeben werden in der Form $\bar{x} = A^\# \vec{b}$.

Für Matrizen, die eine QR -Zerlegung besitzen, kann die Näherungslösung von $A\vec{x} = \vec{b}$ schneller auf folgendem Weg berechnet werden.

Setzt man $A = QR$ in die Relation $A^t A \bar{x} = A^t \vec{b}$ ein, dann erhält man

$$(QR)^t(QR)\bar{x} = (QR)^t\vec{b} \quad \text{bzw.} \quad R^t Q^t Q R \bar{x} = R^t Q^t \vec{b} .$$

Weil $Q^t Q = I$ und R^t invertierbar, folgt $R\bar{x} = Q^t \vec{b}$ und $\bar{x} = R^{-1} Q^t \vec{b}$.

(Weil R eine obere Dreiecksmatrix ist, wird man in der Praxis das System $R\bar{x} = Q^t \vec{b}$ direkt durch Rückwärtseinsetzen lösen.)

.....

Ausgleichskurven - Methode der kleinsten Quadrate

Nun beschäftigen wir uns mit der Frage, zu gegebenen Punkten der xy -Ebene eine "bestmögliche" Funktion aus einer bestimmten Klasse zu ermitteln, um den funktionalen Zusammenhang darzustellen und auch Werte an nicht-tabellierten Stellen abzuschätzen.

Gegeben seien also m verschiedene Punkte $\{(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)\}$. Es ist bereits bekannt (Interpolation), dass es Polynome (genügend hohen Grades) gibt, die durch alle Punkte gehen.

Jetzt fragen wir nach einer "besten" approximierenden Geraden (die i.a. natürlich nicht alle gegebenen Punkte enthalten wird).

Wir treffen den Ansatz $y = a + bx$ und bezeichnen mit $a + bx_i$ den i -ten Wert auf dieser Geraden, und mit y_i den i -ten gegebenen y -Wert.

Die Konstanten a und b sollen nun so gewählt werden, dass der sogenannte **quadratische Fehler**

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^m [y_i - (a + bx_i)]^2 \quad \text{minimal wird.}$$

Dies ist eine Extremwertaufgabe in zwei Variablen, deren Lösung (**Methode der kleinsten Quadrate**) lautet

$$a = \frac{(\sum_{i=1}^m x_i^2)(\sum_{i=1}^m y_i) - (\sum_{i=1}^m x_i y_i)(\sum_{i=1}^m x_i)}{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - (\sum_{i=1}^m x_i)^2}, \quad b = \frac{m \sum_{i=1}^m x_i y_i - (\sum_{i=1}^m x_i)(\sum_{i=1}^m y_i)}{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - (\sum_{i=1}^m x_i)^2}$$

Die dadurch definierte Gerade heisst **Ausgleichsgerade** .

Eine weitere Fragestellung besteht darin, eine Datenmenge $\{(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)\}$ durch ein Polynom $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ vom Grad $n < m - 1$ zu approximieren, wobei wiederum der Gesamtfehler (das ist die Summe der Quadrate der Differenzen zwischen den y -Werten auf der approximierenden Kurve und den gegebenen y -Werten, minimal wird (= **Methode der kleinsten Quadrate**).

Damit also $E(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^m [y_i - P_n(x_i)]^2$ minimal wird, muss notwendigerweise

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0 \quad \text{für } j = 0, 1, \dots, n$$

Dies liefert $n + 1$ lineare Gleichungen für die $n + 1$ Unbekannten a_0, a_1, \dots, a_n .

$$\begin{aligned} a_0 \sum_{i=1}^m 1 + a_1 \sum_{i=1}^m x_i^1 + a_2 \sum_{i=1}^m x_i^2 + \dots + a_n \sum_{i=1}^m x_i^n &= \sum_{i=1}^m y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^m x_i^1 + a_1 \sum_{i=1}^m x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^m x_i^3 + \dots + a_n \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} &= \sum_{i=1}^m y_i x_i^1 \\ &\vdots \\ a_0 \sum_{i=1}^m x_i^n + a_1 \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} + a_2 \sum_{i=1}^m x_i^{n+2} + \dots + a_n \sum_{i=1}^m x_i^{2n} &= \sum_{i=1}^m y_i x_i^n \end{aligned}$$

Dieses System besitzt eine eindeutige Lösung, wenn die x_i verschieden voneinander sind.

.....

Bestimmung von Eigenwerten - Potenzmethode

Bereits bekannt: die Eigenwerte einer Matrix $A \in M(n \times n)$ ergeben sich als Nullstellen des charakteristischen Polynoms, d.h. sie sind die Lösungen der Gleichung

$$P_n(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 .$$

$\det(A - \lambda I)$ ist ein Polynom n -ten Grades und hat nach dem Fundamentalsatz der Algebra in \mathbb{C} genau n Nullstellen, d.h. $P_n(\lambda)$ kann angegeben werden in der Form

$$P_n(\lambda) = a(\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_r)^{k_r}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ sind die **verschiedenen** Nullstellen

k_1, k_2, \dots, k_r sind die entsprechenden Vielfachheiten,
wobei $k_1 + k_2 + \dots + k_r = n$

Das Problem, bei der Bestimmung der Eigenwerte direkt mit dem charakteristischen Polynom zu arbeiten, besteht darin, dass bereits sehr kleine Änderungen der Koeffizienten große Auswirkungen auf die Nullstellen haben.

Beispiel.

Das Polynom $P_{20}(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - 20)$ hat offenbar die Nullstellen $\lambda_i = i$, $i = 1, \dots, 20$.

Das Polynom $Q_{20}(\lambda) = P_{20}(\lambda) - 2^{-23}\lambda^{19}$, das sich nur sehr geringfügig von $P_{20}(\lambda)$ unterscheidet, hat die unten in der komplexen Zahlenebene dargestellten Nullstellen. Die Lage der Nullstellen hat sich dabei drastisch verändert.

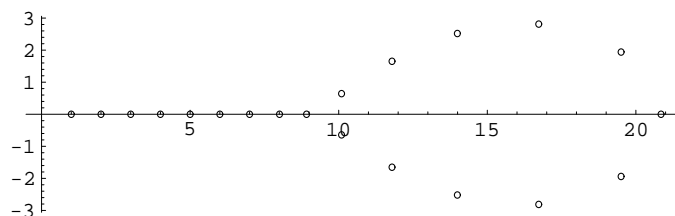


Figure 1: Nullstellen von $Q_{20}(\lambda)$

Bestimmung der Eigenwerte durch Iteration - Potenzmethode

Die Matrix $A = (a_{ij}) \in M(n \times n)$ habe die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

Wir treffen weiters die folgenden Annahmen

- $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$

(λ_1 wird als **dominierender Eigenwert** bezeichnet)

- A ist diagonalisierbar, d.h. es existieren n linear unabhängige Eigenvektoren. Dies ist etwa bei reellen symmetrischen Matrizen der Fall.

Ziel der folgenden Methode ist es, eine gute Näherung für den dominanten Eigenwert λ_1 anzugeben.

Dazu wählen wir ein beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und bilden sukzessive

$$x_1 = Ax_0$$

$$x_2 = Ax_1 = A^2x_0$$

$$x_3 = Ax_2 = A^3x_0$$

⋮

$$x_s = Ax_{s-1} = A^s x_0, \quad s \in \mathbb{N}$$

Die Diskussion im Skriptum zeigt, dass für große Werte von s gilt

$$x_s \approx \lambda_1^s \cdot \alpha_1 \cdot u_1 \quad (\alpha_1 \in \mathbb{R}, \quad u_1 \text{ Eigenvektor von } \lambda_1)$$

$$x_{s+1} \approx \lambda_1^{s+1} \cdot \alpha_1 \cdot u_1 \approx \lambda_1 \cdot x_s$$

Skalarmultiplikation mit dem Vektor x_s ergibt

$$\langle x_{s+1}, x_s \rangle \approx \lambda_1 \cdot \langle x_s, x_s \rangle \quad \text{bzw.}$$

$$\lambda_1 \approx \frac{\langle x_{s+1}, x_s \rangle}{\langle x_s, x_s \rangle} \quad \text{für } \|x_s\| \neq 0.$$

Definition. Der Quotient $\mu_s = \frac{\langle x_{s+1}, x_s \rangle}{\langle x_s, x_s \rangle}$ wird als **Rayleigh-Quotient** bezeichnet. Er approximiert den dominanten Eigenwert!

Bemerkungen. Es ist darauf zu achten, dass der Startvektor x_0 nicht orthogonal zu u_1 ist.

Des weiteren können Probleme auftauchen, wenn sich $|\lambda_2|$ nur sehr wenig von $|\lambda_1|$ unterscheidet, da in diesem Fall die Approximation mit wachsendem s ungenau wird.

Satz. Sei $A \in M(n \times n)$ eine symmetrische reelle Matrix, und $x_0 \neq 0$ beliebig. Dann konvergiert der Rayleigh-Quotient

$$\mu_s = \frac{\langle x_{s+1}, x_s \rangle}{\langle x_s, x_s \rangle} = \frac{\langle Ax_s, x_s \rangle}{\langle x_s, x_s \rangle}$$

gegen den dominanten Eigenwert λ_1 .

Setzt man $\mu_s = \lambda_1 + \varepsilon$ (d.h. ε ist der Fehler in μ_s), dann gilt

$$|\varepsilon| \leq \sqrt{\frac{\langle x_{s+1}, x_{s+1} \rangle}{\langle x_s, x_s \rangle} - \mu_s^2}$$

Bemerkung. Weitere Eigenwerte können mit der sogenannten erweiterten Potenzmethode approximiert werden.

Approximation von Eigenwerten mittels QR -Zerlegung

Sei $A \in M(m \times n)$, $m \geq n$ eine Matrix mit linear unabhängigen Spaltenvektoren. Dann existiert bekanntlich eine QR -Zerlegung $A = QR$ von A .

Wir bilden nun eine Folge (A_k) von Matrizen nach dem Bildungsgesetz

$$A_1 = RQ \quad (\text{und } A_1 \text{ habe } QR\text{-Zerlegung } A_1 = Q_1 R_1)$$

$$A_2 = R_1 Q_1 \quad (\text{und } A_2 \text{ habe } QR\text{-Zerlegung } A_2 = Q_2 R_2)$$

$$A_3 = R_2 Q_2 \quad \text{etc.}$$

\vdots

$$A_{k+1} = R_k Q_k \quad (\text{wobei } A_k = Q_k R_k)$$

Bemerkung. Die Matrizen A_k besitzen dieselben Eigenwerte wie A .

Satz. Sind alle Eigenwerte von A reell und betragsmäßig voneinander verschieden, dann konvergiert die Folge (A_k) gegen eine obere Dreiecksmatrix U , in deren Diagonale die Eigenwerte von A stehen.