

4. Übungsblatt – Gruppe A

46. Man berechne die folgenden Linienintegrale $\int_C \vec{K} d\vec{x}$, über die angegebene Kurve \mathcal{C} je ①

(a) $\vec{K} = \begin{pmatrix} x^2 \\ -xy \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$

(b) $\vec{K} = \begin{pmatrix} y^3 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} \dots$ Bogen der Parabel $x = 1 - y^2$ von $P(0, -1)$ nach $Q(0, 1)$

(c) $\vec{K} = \begin{pmatrix} e^{x-1} \\ xy \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} : \vec{x} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$

47. Man berechne das Linienintegral

$$\int_C xy dx + y dy$$

wobei \mathcal{C} die Kurve $y = \sin x$ für $0 \leq x \leq \pi/2$ bezeichnet. ①

48. Man berechne das Linienintegral

$$\int_C z dx + x dy + y dz$$

wobei die geschlossene Kurve \mathcal{C} sich zusammensetzt

- aus dem Kurvenbogen $\vec{x} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$, der vom Ursprung zum Punkt $P(1, 1, 1)$ geht, und
- der Geraden von P zurück zum Ursprung. ②

49. Man berechne das Kurvenintegral je ②

$$\int_C \vec{K} d\vec{x}$$

und skizziere die Kurve \mathcal{C}

(a) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}$$

und \mathcal{C} : Gerade von $P(1, 2)$ nach $Q(3, 4)$.

(b) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und \mathcal{C} : Parabel $y = 4 - x^2$ von $P(-2, 0)$ nach $Q(0, 4)$.

(c) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

(d) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x + y \\ x & y \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

50. Die Koordinaten des Schwerpunktes $S(x_s, y_s)$ eines Drahtstücks mit der Gestalt wie die des Kurvenstücks \mathcal{C} und mit der Dichte $\varrho(x, y)$ sind gegeben durch

$$x_s = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} x \varrho(x, y) ds, \quad y_s = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} y \varrho(x, y) ds$$

wobei

$$m = \int_{\mathcal{C}} \varrho(x, y) ds$$

die Gesamtmasse des Drahtstücks bezeichnet.

Man berechne die Koordinaten von S , wenn das Drahtstück die Gestalt des Halbkreises

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y \leq 0$$

besitzt und die Dichte gegeben ist durch $\varrho(x, y) = 1 - y$. ②

51. Man berechne das Integral

$$\iint_B f(x, y) dx dy$$

für die angegebenen Funktionen $f(x, y)$ und die beschriebenen Bereiche B .

Man fertige eine Skizze des Bereichs B an! je ②

(a) $f(x, y) = x^2 y$, B ist das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$

(b) $f(x, y) = y \left(1 - \cos \frac{\pi x}{4}\right)$, wobei B begrenzt wird von den Kurven $x = 0$, $y = \sqrt{x}$ und $y = 2$.

- (c) $f(x, y) = e^{x+y^2}$, $B = \{(x, y) \mid \ln y \leq x \leq \ln 2y, 1 \leq y \leq 2\}$
 (d) $f(x, y) = (1 - x^3)y^2$, B wird begrenzt von den Kurven $y = x^2$ und $x = y^2$

52. Man berechne das Doppelintegral

je (2)

$$\iint_B f(x, y) \, dx \, dy$$

und skizziere den Bereich B für folgende Angaben

- (a) $f(x, y) = xy$, $B = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 2, -x^2 \leq y \leq 1 + x^2\}$
 (b) $f(x, y) = 2xy^2$, B wird begrenzt von den Kurven $x = y^2$, $x = 3 - 2y^2$

53. Mit Hilfe von Polarkoordinaten berechne man folgendes Integral

(2)

$$\int_{y=-1}^1 \int_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2} \, dx \, dy$$

Skizzieren Sie den Integrationsbereich.

54. Man berechne das Integral

(2)

$$\int_{x=0}^{\pi/2} \int_{z=1}^2 \int_{y=0}^{\sqrt{1-z}} y \cos x \, dy \, dz \, dx$$

55. Man berechne man das Integral

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

für die angegebenen Funktionen $f(x, y, z)$ und die beschriebenen Bereiche B .

Man fertige eine Skizze des Bereichs B an!

je (2)

- (a) $f(x, y, z) = 2x$, $B = \{(x, y, z) \mid 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{4-y^2}, 0 \leq z \leq y\}$.
 ($I = 4$)
 (b) $f(x, y, z) = y$, B ist der Tetraeder, der von den Flächen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und $2x + 3y + z = 4$ begrenzt wird.
 (c) $f(x, y, z) = x$, B wird begrenzt von dem Paraboloid $x = 4y^2 + 4z^2$ und der Ebene $x = 4$.
 (d) $f(x, y, z) = 3x + xz$, B wird begrenzt vom Zylinder $x^2 + z^2 = 9$ sowie den Ebenen $y + z = 3$ und $y = 0$. ($I = 0$)

(e) $f(x, y, z) = z$, B liegt im oberen Halbraum und wird begrenzt von dem Drehkegel $9x^2 + z^2 = y^2$ sowie den Ebenen $z = 0$ und $y = 9$. ($I = 729/2$)

56. Man skizziere den von den Flächen

②

$$3x + 2y + z = 6, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

begrenzten räumlichen Bereich und berechne anschließend das Volumen dieses Bereichs.

57. Unter Verwendung von Polarkoordinaten berechne man das Volumen des räumlichen Bereichs, der unterhalb des Kegels $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ und über der Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 4$ liegt.

②

58. Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten berechne man das Integral

$$\iiint_B x \, dV$$

Dabei bezeichnet B den räumlichen Bereich, der eingeschlossen wird von den Ebenen $z = 0$ und $z = x + y + 5$ sowie von den Zylindern $x^2 + y^2 = 4$ und $x^2 + y^2 = 9$.

②

59. Verwende Zylinderkoordinaten zur Berechnung des Integrals

②

$$\iiint_B x \, dV$$

wobei der Bereich B der im ersten Oktanten liegende Teil des Paraboloids $z = x^2 + y^2$ ist, der nach oben von der Ebene $z = 4$ begrenzt wird.

60. Unter Verwendung von Kugelkoordinaten berechne man das Integral

$$\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^2 \, dV$$

Dabei bezeichnet B die Kugel mit dem Mittelpunkt im Ursprung und dem Radius 5.

②

61. Man bestimme die JACOBI-Determinante der Koordinatentransformation

①

$$\begin{aligned} x &= u^2 + w^2 \\ y &= u + 3w \\ z &= u^2 - v^2 + w^2 \end{aligned}$$

4. Übungsblatt – Gruppe B

46. Man berechne die folgenden Linienintegrale $\int_C \vec{K} d\vec{x}$ über die angegebene Kurve \mathcal{C} je **1**

(a) $\vec{K} = \begin{pmatrix} y \\ x^2 + xy \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2$

(b) $\vec{K} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} \dots$ positiv orientiertes Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$

(c) $\vec{K} = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ xy \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} : \vec{x} = \begin{pmatrix} t^3 \\ 11t^4 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$

47. Man berechne das Linienintegral

$$\int_C y dx - x dy$$

wobei \mathcal{C} den Teil der Parabel $y^2 = x$ bezeichnet, der die Punkte $(1, -1)$ und $(1, 1)$ verbindet. **1**

48. Man berechne das Linienintegral

$$\int_C y dx + z dy + x dz$$

wobei die geschlossene Kurve \mathcal{C} sich zusammensetzt

- aus dem Kurvenbogen $\vec{x} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$, der vom Ursprung zum Punkt $P(1, 1, 1)$ geht, und
- der Geraden von P zurück zum Ursprung. **2**

49. Man berechne das Kurvenintegral je **2**

$$\int_C \vec{K} d\vec{x}$$

und skizziere die Kurve \mathcal{C}

(a) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}$$

und \mathcal{C} : Gerade von $P(1, 0)$ nach $Q(2, 3)$.

(b) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und \mathcal{C} : Parabel $y = x^2 - 4$ von $P(-2, 0)$ nach $Q(0, -4)$.

(c) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ t^3 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

(d) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x + y \\ x & y \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^t \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

50. Die Koordinaten des Schwerpunktes $S(x_s, y_s)$ eines Drahtstücks mit der Gestalt wie die des Kurvenstücks \mathcal{C} und mit der Dichte $\varrho(x, y)$ sind gegeben durch

$$x_s = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} x \varrho(x, y) ds, \quad y_s = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} y \varrho(x, y) ds$$

wobei

$$m = \int_{\mathcal{C}} \varrho(x, y) ds$$

die Gesamtmasse des Drahtstücks bezeichnet.

Man berechne die Koordinaten von S , wenn das Drahtstück die Gestalt des Halbkreises

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y \leq 0$$

besitzt und die Dichte gegeben ist durch $\varrho(x, y) = 1 - y$.

②

51. Man berechne das Integral

$$\iint_B f(x, y) dx dy$$

für die angegebenen Funktionen $f(x, y)$ und die beschriebenen Bereiche B .

Man fertige eine Skizze des Bereichs B an!

je ②

(a) $f(x, y) = x \sin y - ye^x$, dabei ist B das Rechteck $B = [-1, 1] \times [0, \pi/2]$

(b) $f(x, y) = x + 2y$, wobei B begrenzt wird von den Parabeln $y = 2x^2$ und $y = 1 + x^2$.

- (c) $f(x, y) = y\sqrt{x}$, $B = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 1\}$
 (d) $f(x, y) = 1$, B liegt im ersten Quadranten und wird begrenzt von den Kurven $y = 2x - 4$ und $8y = 16 + x^2$.

52. Man berechne das Doppelintegral

je (2)

$$\iint_B f(x, y) \, dx \, dy$$

und skizziere den Bereich B für folgende Angaben

- (a) $f(x, y) = x + 2y$, $B = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$
 (b) $f(x, y) = \sin(x) - y$, B wird begrenzt von den Kurven $y = \cos x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi/2$

53. Mit Hilfe von Polarkoordinaten berechne man folgendes Integral

(2)

$$\int_{y=0}^1 \int_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}} \cos(x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

Skizzieren Sie den Integrationsbereich.

54. Man berechne das Integral

(2)

$$\int_{y=-1}^1 \int_{z=0}^2 \int_{x=0}^{\sqrt{4-z^2}} y^2 z \, dx \, dz \, dy$$

55. Man berechne man das Integral

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

für die angegebenen Funktionen $f(x, y, z)$ und die beschriebenen Bereiche B .

Man fertige eine Skizze des Bereichs B an!

je (2)

- (a) $f(x, y, z) = 4y$, B liegt im ersten Oktanten und wird von den Ebenen $z = \frac{y}{2}$, $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 4$ und $z = 0$ eingeschlossen. ($I = 128$)
 (b) $f(x, y, z) = z$, B ist der Tetraeder, der von den Flächen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und $x + y + z = 1$ begrenzt wird.
 (c) $f(x, y, z) = z$, B liegt im ersten Oktanten und wird begrenzt von dem Zylinder $y^2 + z^2 = 9$ sowie den Ebenen $x = 0$, $y = 3x$ und $z = 0$.
 (d) $f(x, y, z) = x^2 e^y$, B wird begrenzt vom parabolischen Zylinder $z = 1 - y^2$ und den Ebenen $z = 0$, $x = 1$ und $x = -1$. ($I = 8/(3e)$)

(e) $f(x, y, z) = z$, B liegt im oberen Halbraum und wird begrenzt von dem Drehkegel $9x^2 + z^2 = y^2$ und den Ebenen $z = 0$ und $y = -9$. ($I = 729/2$)

56. Man skizziere den von den Flächen

②

$$y = 2z, \quad y = x^2, \quad y = 4, \quad z = 0$$

begrenzten räumlichen Bereich und berechne anschließend das Volumen dieses Bereichs.

57. Unter Verwendung von Polarkoordinaten berechne man das Volumen des räumlichen Bereichs, der innerhalb der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ und außerhalb des Zylinders $x^2 + y^2 = 4$ liegt.

②

58. Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten berechne man das Integral

$$\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2} \, dV$$

Dabei bezeichnet B den räumlichen Bereich, der innerhalb des Zylinders $x^2 + y^2 = 16$ zwischen den Ebenen $z = -5$ und $z = 4$ liegt.

②

59. Verwende Zylinderkoordinaten zur Berechnung des Integrals

②

$$\iiint_B (x^2 + y^2) \, dV$$

wobei der Bereich B begrenzt wird durch den Zylinder $x^2 + y^2 = 1$ und die Ebenen $z = 1$ und $z = 3$.

60. Unter Verwendung von Kugelkoordinaten berechne man das Integral

$$\iiint_B (9 - x^2 - y^2) \, dV$$

Dabei bezeichnet B die Halbkugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0$.

②

61. Man bestimme die JACOBI-Determinante der Koordinatentransformation

①

$$\begin{aligned} x &= u + v - w \\ y &= -u + v + w \\ z &= 2u - 2v + 3w \end{aligned}$$

4. Übungsblatt – Gruppe C

46. Man berechne die folgenden Linienintegrale $\int_C \vec{K} d\vec{x}$, über die angegebene Kurve \mathcal{C} je **1**

(a) $\vec{K} = \begin{pmatrix} xy \\ 2y^2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{C} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 11t^4 \\ t^3 \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 1$

(b) $\vec{K} = \begin{pmatrix} x \\ xy \end{pmatrix}$, $\mathcal{C} \dots$ Bogen der Parabel $y = x^2$
von $P(0,0)$ nach $Q(1,1)$

(c) $\vec{K} = \begin{pmatrix} 3 + 2xy \\ x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{C} : \vec{x} = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

47. Man berechne das Linienintegral

$$\int_C xy dx + y dy$$

wobei \mathcal{C} die Kurve $y = \sin x$ für $0 \leq x \leq \pi/2$ bezeichnet. **1**

48. Man berechne das Linienintegral

$$\int_C y dx + z dy + x dz$$

wobei \mathcal{C} die Strecke von $(2,0,0)$ nach $(3,4,5)$ und dann von $(3,4,5)$ nach $(3,4,0)$ bezeichnet. **2**

49. Man berechne das Kurvenintegral je **2**

$$\int_C \vec{K} d\vec{x}$$

und skizziere die Kurve \mathcal{C}

(a) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} xy \\ x + y \end{pmatrix}$$

und $\mathcal{C} : \text{Gerade von } P(0, -1) \text{ nach } Q(4, 3)$.

(b) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und \mathcal{C} : Parabel $x = 4 - y^2$ von $P(0, 2)$ nach $Q(4, 0)$.

(c) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} xy \\ y \\ -x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

(d) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x + y \\ xy \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{2t} \\ e^t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

50. Die Koordinaten des Schwerpunktes $S(x_s, y_s)$ eines Drahtstücks mit der Gestalt wie die des Kurvenstücks \mathcal{C} und mit der Dichte $\varrho(x, y)$ sind gegeben durch

$$x_s = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} x \varrho(x, y) ds, \quad y_s = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} y \varrho(x, y) ds$$

wobei

$$m = \int_{\mathcal{C}} \varrho(x, y) ds$$

die Gesamtmasse des Drahtstücks bezeichnet.

Man berechne die Koordinaten von S , wenn das Drahtstück die Gestalt des Halbkreises

$$x^2 + y^2 = 4, \quad x \geq 0$$

besitzt und die Dichte gegeben ist durch $\varrho(x, y) = 1$.

②

51. Man berechne das Integral

$$\iint_B f(x, y) dx dy$$

für die angegebenen Funktionen $f(x, y)$ und die beschriebenen Bereiche B .

Man fertige eine Skizze des Bereichs B an!

je ②

- (a) $f(x, y) = x^2 y$, B ist das Dreieck mit den Eckpunkten $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$
- (b) $f(x, y) = x \cos y$, wobei B begrenzt wird von den Geraden $y = 0$ und $x = 1$ sowie der Parabel $y = x^2$.
- (c) $f(x, y) = x^2$, wobei B von den Kurven $xy = 16$, $y = x$, $y = 0$ und $x = 8$ begrenzt wird.
- (d) $f(x, y) = x^2 + 2xy^2 + 2$, B liegt im ersten Quadranten und wird begrenzt von den Kurven $y = 2 - x^2 + x$, $x = 0$ und $y = 0$.

52. Man berechne das Doppelintegral

je (2)

$$\iint_B f(x, y) \, dx \, dy$$

und skizziere den Bereich B für folgende Angaben

(a) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2}$, $B = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$

(b) $f(x, y) = x^2 + y$, B wird begrenzt von den Kurven
 $y = x^2 + 2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

53. Mit Hilfe von Polarkoordinaten berechne man folgendes Integral

(2)

$$\int_{x=-2}^2 \int_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} \, dy \, dx$$

Skizzieren Sie den Integrationsbereich.

54. Man berechne das Integral

(2)

$$\int_{y=-1}^1 \int_{z=0}^2 \int_{x=0}^{\sqrt{4-z^2}} y^2 z \, dx \, dz \, dy$$

55. Man berechne man das Integral

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

für die angegebenen Funktionen $f(x, y, z)$ und die beschriebenen Bereiche B .

Man fertige eine Skizze des Bereichs B an!

je (2)

(a) $f(x, y, z) = 6xy$, B liegt unter der Ebene $z = 1 + x + y$ und über dem Bereich B' der xy -Ebene, der begrenzt wird von den Kurven $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ und $x = 1$.
($I = 65/28$)

(b) $f(x, y, z) = z$, B ist der Tetraeder, der von den Flächen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und $x + y + z = 1$ begrenzt wird.

(c) $f(x, y, z) = x$, B wird begrenzt von dem Paraboloid $x = 4y^2 + 4z^2$ und der Ebene $x = 4$.

(d) $f(x, y, z) = 1$, B wird begrenzt von den Paraboloiden $x = y^2 + z^2$ und $x = 2 - y^2 - z^2$. ($I = \pi$)

(e) $f(x, y, z) = z$, B liegt im oberen Halbraum und wird begrenzt von dem Drehkegel $9x^2 + z^2 = y^2$ und den Ebenen $z = 0$ und $y = -9$. ($I = 729/2$)

56. Man skizziere den von den Flächen

②

$$x = 4 - y^2, \quad x + z = 4, \quad x = 0, \quad z = 0$$

begrenzten räumlichen Bereich und berechne anschließend das Volumen dieses Bereichs.

57. Unter Verwendung von Polarkoordinaten berechne man das Volumen des räumlichen Bereichs, der unterhalb des Kegels $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ und über der Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 4$ liegt.

②

58. Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten berechne man das Integral

$$\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2} \, dV$$

Dabei bezeichnet B den räumlichen Bereich, der innerhalb des Zylinders $x^2 + y^2 = 16$ zwischen den Ebenen $z = -5$ und $z = 4$ liegt.

②

59. Verwende Zylinderkoordinaten zur Berechnung des Integrals

②

$$\iiint_B e^{x^2 + y^2} \, dV$$

wobei der Bereich B begrenzt wird durch den Zylinder $x^2 + y^2 = 4$ und die Ebenen $z = 0$ und $z = 4$.

60. Unter Verwendung von Kugelkoordinaten berechne man das Integral

$$\iiint_B z \, dV$$

Dabei bezeichnet B den räumlichen Bereich im ersten Oktanten, der zwischen den Sphären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ liegt.

②

61. Man bestimme die JACOBI-Determinante der Koordinatentransformation

①

$$\begin{aligned} x &= u + v + w \\ y &= u - v + w \\ z &= u - 2v + 3w \end{aligned}$$

4. Übungsblatt – Gruppe D

46. Man berechne die folgenden Linienintegrale $\int_C \vec{K} d\vec{x}$ über die angegebene Kurve \mathcal{C} je **1**

(a) $\vec{K} = \begin{pmatrix} y \\ x^2 + xy \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2$

(b) $\vec{K} = \begin{pmatrix} y^3 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} \dots$ Bogen der Parabel $x = 1 - y^2$ von $P(0, -1)$ nach $Q(0, 1)$

(c) $\vec{K} = \begin{pmatrix} 3 + 2xy \\ x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} : \vec{x} = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

47. Man berechne das Linienintegral

$$\int_C x dy - y dx$$

wobei \mathcal{C} den Halbkreisbogen von $(0, -1)$ über $(1, 0)$ nach $(0, 1)$ bezeichnet. **1**

48. Man berechne das Linienintegral

$$\int_C (x + yz) dx + 2x dy + xyz dz$$

wobei \mathcal{C} die Strecke von $(1,0,1)$ nach $(2,3,1)$ und dann von $(2,3,1)$ nach $(2,5,2)$ bezeichnet. **2**

49. Man berechne das Kurvenintegral je **2**

$$\int_C \vec{K} d\vec{x}$$

und skizziere die Kurve \mathcal{C}

(a) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} xy \\ x + y \end{pmatrix}$$

und \mathcal{C} : Gerade von $P(1, 1)$ nach $Q(3, 2)$.

(b) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und \mathcal{C} : Parabel $x = y^2 - 4$ von $P(-4, 0)$ nach $Q(0, -2)$.

(c) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x y \\ y \\ -x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

(d) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x + y \\ x y \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{-t} \\ e^t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

50. Die Koordinaten des Schwerpunktes $S(x_s, y_s)$ eines Drahtstücks mit der Gestalt wie die des Kurvenstücks \mathcal{C} und mit der Dichte $\varrho(x, y)$ sind gegeben durch

$$x_s = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} x \varrho(x, y) ds, \quad y_s = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} y \varrho(x, y) ds$$

wobei

$$m = \int_{\mathcal{C}} \varrho(x, y) ds$$

die Gesamtmasse des Drahtstücks bezeichnet.

Man berechne die Koordinaten von S , wenn das Drahtstück die Gestalt des Halbkreises

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y \geq 0$$

besitzt und die Dichte gegeben ist durch $\varrho(x, y) = 1 - y$.

②

51. Man berechne das Integral

$$\iint_B f(x, y) dx dy$$

für die angegebenen Funktionen $f(x, y)$ und die beschriebenen Bereiche B .

Man fertige eine Skizze des Bereichs B an!

je ②

(a) $f(x, y) = x \sin y - ye^x$, dabei ist B das Rechteck $B = [-1, 1] \times [0, \pi/2]$

(b) $f(x, y) = y \left(1 - \cos \frac{\pi x}{4}\right)$, wobei B begrenzt wird von den Kurven $x = 0$, $y = \sqrt{x}$ und $y = 2$.

(c) $f(x, y) = x^2$, wobei B von den Kurven $xy = 16$, $y = x$, $y = 0$ und $x = 8$ begrenzt wird.

(d) $f(x, y) = 1$, B liegt im ersten Quadranten und wird begrenzt von den Kurven $y = 2x - 4$ und $8y = 16 + x^2$.

52. Man berechne das Doppelintegral

je (2)

$$\iint_B f(x, y) \, dx \, dy$$

und skizziere den Bereich B für folgende Angaben

(a) $f(x, y) = x^3 + 2y$, $B = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}$

(b) $f(x, y) = 4x^3$, B wird begrenzt von den Kurven
 $y = (x - 1)^2$, $y = 3 - x$

53. Mit Hilfe von Polarkoordinaten berechne man folgendes Integral

(2)

$$\int_{x=0}^3 \int_{y=0}^{\sqrt{9-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} \, dy \, dx$$

Skizzieren Sie den Integrationsbereich.

54. Man berechne das Integral

(2)

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x \int_{z=0}^{x+y} x \, dz \, dy \, dx$$

55. Man berechne man das Integral

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

für die angegebenen Funktionen $f(x, y, z)$ und die beschriebenen Bereiche B .

Man fertige eine Skizze des Bereichs B an!

je (2)

(a) $f(x, y, z) = 6xy$, B liegt unter der Ebene $z = 1 + x + y$ und über dem Bereich B' der xy -Ebene, der begrenzt wird von den Kurven $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ und $x = 1$.
($I = 65/28$)

(b) $f(x, y, z) = 1$, B ist der Tetraeder, der von den Flächen $x = 0$, $z = 0$, $x = 2y$ und $x + 2y + z = 2$ begrenzt wird.

(c) $f(x, y, z) = 1$, B wird begrenzt vom Zylinder $x = y^2$ sowie den Ebenen $z = 0$ und $x + z = 1$.

(d) $f(x, y, z) = 1$, B wird begrenzt von den Paraboloiden $x = y^2 + z^2$ und $x = 2 - y^2 - z^2$. ($I = \pi$)

(e) $f(x, y, z) = z$, B liegt im oberen Halbraum und wird begrenzt von dem Drehkegel $9y^2 + z^2 = x^2$ und den Ebenen $z = 0$ und $x = 9$. ($I = 729/2$)

56. Man skizziere den von den Flächen

②

$$z = 1 - x^2, y = x, y = 2 - x, z = 0$$

begrenzten räumlichen Bereich und berechne anschließend das Volumen dieses Bereichs.

57. Unter Verwendung von Polarkoordinaten berechne man das Volumen des räumlichen Bereichs, der unterhalb des Paraboloids $z = 18 - 2x^2 - 2y^2$ und über der xy -Ebene liegt. ②

58. Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten berechne man das Integral

$$\iiint_B (x^3 + xy^2) dV$$

Dabei bezeichnet B den räumlichen Bereich im ersten Oktanten, der unter dem Paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$ liegt. ②

59. Verwende Zylinderkoordinaten zur Berechnung des Integrals ②

$$\iiint_B y dV$$

wobei der Bereich B der im ersten Oktanten liegende Teil des Paraboloids $z = 4 - x^2 - y^2$ ist.

60. Unter Verwendung von Kugelkoordinaten berechne man das Integral

$$\iiint_B z dV$$

Dabei bezeichnet B den räumlichen Bereich im ersten Oktanten, der zwischen den Sphären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ liegt. ②

61. Man bestimme die JACOBI-Determinante der Koordinatentransformation ①

$$\begin{aligned} x &= 2u + w \\ y &= u^2 - v^2 \\ z &= u^2 + v^2 - 2w^2 \end{aligned}$$

4. Übungsblatt – Gruppe GEO

46. Man berechne die folgenden Linienintegrale $\int_{\mathcal{C}} \vec{K} d\vec{x}$, über die angegebene Kurve \mathcal{C} je **1**

(a) $\vec{K} = \begin{pmatrix} x^2 \\ -xy \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$

(b) $\vec{K} = \begin{pmatrix} y^3 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} \dots$ Bogen der Parabel $x = 1 - y^2$ von $P(0, -1)$ nach $Q(0, 1)$

(c) $\vec{K} = \begin{pmatrix} e^{x-1} \\ xy \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} : \vec{x} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$

47. Man berechne das Linienintegral

$$\int_{\mathcal{C}} y dx - x dy$$

wobei \mathcal{C} den Teil der Parabel $y^2 = x$ bezeichnet, der die Punkte $(1, -1)$ und $(1, 1)$ verbindet. **1**

48. Man berechne das Linienintegral

$$\int_{\mathcal{C}} y dx + z dy + x dz$$

wobei \mathcal{C} die Strecke von $(2,0,0)$ nach $(3,4,5)$ und dann von $(3,4,5)$ nach $(3,4,0)$ bezeichnet. **2**

49. Man berechne das Kurvenintegral je **2**

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{K} d\vec{x}$$

und skizziere die Kurve \mathcal{C}

(a) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} xy \\ x + y \end{pmatrix}$$

und \mathcal{C} : Gerade von $P(1, 1)$ nach $Q(3, 2)$.

(b) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und \mathcal{C} : Parabel $x = y^2 - 4$ von $P(-4, 0)$ nach $Q(0, -2)$.

(c) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x y \\ y \\ -x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

(d) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x + y \\ x y \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{-t} \\ e^t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

50. Die Koordinaten des Schwerpunktes $S(x_s, y_s)$ eines Drahtstücks mit der Gestalt wie die des Kurvenstücks \mathcal{C} und mit der Dichte $\varrho(x, y)$ sind gegeben durch

$$x_s = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} x \varrho(x, y) ds, \quad y_s = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} y \varrho(x, y) ds$$

wobei

$$m = \int_{\mathcal{C}} \varrho(x, y) ds$$

die Gesamtmasse des Drahtstücks bezeichnet.

Man berechne die Koordinaten von S , wenn das Drahtstück die Gestalt des Halbkreises

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y \leq 0$$

besitzt und die Dichte gegeben ist durch $\varrho(x, y) = 1 - y$. ②

51. Man berechne das Integral

$$\iint_B f(x, y) dx dy$$

für die angegebenen Funktionen $f(x, y)$ und die beschriebenen Bereiche B .

Man fertige eine Skizze des Bereichs B an!

je ②

(a) $f(x, y) = x \sin y - ye^x$, dabei ist B das Rechteck $B = [-1, 1] \times [0, \pi/2]$

(b) $f(x, y) = x + 2y$, wobei B begrenzt wird von den Parabeln $y = 2x^2$ und $y = 1 + x^2$.

(c) $f(x, y) = y\sqrt{x}$, $B = \{(x, y) | 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq 1\}$

(d) $f(x, y) = 1$, B liegt im ersten Quadranten und wird begrenzt von den Kurven $y = 2x - 4$ und $8y = 16 + x^2$.

52. Man berechne das Doppelintegral

je (2)

$$\iint_B f(x, y) \, dx \, dy$$

und skizziere den Bereich B für folgende Angaben

(a) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2}$, $B = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$

(b) $f(x, y) = x^2 + y$, B wird begrenzt von den Kurven
 $y = x^2 + 2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

53. Mit Hilfe von Polarkoordinaten berechne man folgendes Integral

(2)

$$\int_{x=0}^3 \int_{y=0}^{\sqrt{9-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} \, dy \, dx$$

Skizzieren Sie den Integrationsbereich.

54. Man berechne das Integral

(2)

$$\int_{x=0}^{\pi/2} \int_{z=1}^2 \int_{y=0}^{\sqrt{1-z}} y \cos x \, dy \, dz \, dx$$

55. Man berechne man das Integral

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

für die angegebenen Funktionen $f(x, y, z)$ und die beschriebenen Bereiche B .

Man fertige eine Skizze des Bereichs B an!

je (2)

(a) $f(x, y, z) = 4y$, B liegt im ersten Oktanten und wird von den Ebenen
 $z = \frac{y}{2}$, $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 4$ und $z = 0$ eingeschlossen. ($I = 128$)

(b) $f(x, y, z) = z$, B ist der Tetraeder, der von den Flächen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und
 $x + y + z = 1$ begrenzt wird.

(c) $f(x, y, z) = z$, B liegt im ersten Oktanten und wird begrenzt von dem Zylinder
 $y^2 + z^2 = 9$ sowie den Ebenen $x = 0$, $y = 3x$ und $z = 0$.

(d) $f(x, y, z) = x^2 e^y$, B wird begrenzt vom parabolischen Zylinder $z = 1 - y^2$ und
den Ebenen $z = 0$, $x = 1$ und $x = -1$. ($I = 8/(3e)$)

(e) $f(x, y, z) = z$, B liegt im oberen Halbraum und wird begrenzt von dem Dreh-
kegel $9x^2 + z^2 = y^2$ und den Ebenen $z = 0$ und $y = -9$. ($I = 729/2$)

56. Man skizziere den von den Flächen

②

$$x = 4 - y^2, \quad x + z = 4, \quad x = 0, \quad z = 0$$

begrenzten räumlichen Bereich und berechne anschließend das Volumen dieses Bereichs.

57. Unter Verwendung von Polarkoordinaten berechne man das Volumen des räumlichen Bereichs, der unterhalb des Paraboloids $z = 18 - 2x^2 - 2y^2$ und über der xy -Ebene liegt.

②

58. Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten berechne man das Integral

$$\iiint_B x \, dV$$

Dabei bezeichnet B den räumlichen Bereich, der eingeschlossen wird von den Ebenen $z = 0$ und $z = x + y + 5$ sowie von den Zylindern $x^2 + y^2 = 4$ und $x^2 + y^2 = 9$.

②

59. Verwende Zylinderkoordinaten zur Berechnung des Integrals

②

$$\iiint_B (x^2 + y^2) \, dV$$

wobei der Bereich B begrenzt wird durch den Zylinder $x^2 + y^2 = 1$ und die Ebenen $z = 1$ und $z = 3$.

60. Unter Verwendung von Kugelkoordinaten berechne man das Integral

$$\iiint_B z \, dV$$

Dabei bezeichnet B den räumlichen Bereich im ersten Oktanten, der zwischen den Sphären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ liegt.

②

61. Man bestimme die JACOBI-Determinante der Koordinatentransformation

①

$$\begin{aligned} x &= 2u + w \\ y &= u^2 - v^2 \\ z &= u^2 + v^2 - 2w^2 \end{aligned}$$