Partielle Differentialgleichungen

Definition. Eine **partielle Differentialgleichung** ist eine Dgl., in der partielle Ableitungen einer gesuchten Funktion $z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mehrerer unabhängiger Variabler $x_1, x_2, \ldots, x_n$ auftreten.

Die höchste vorkommende Ableitung in der Differentialgleichung bestimmt die **Ordnung** der Dgl.

Eine **lineare partielle Dgl. 2. Ordnung** für die Funktion $z(x, y)$ besitzt die Form

$$a_{11}z_{xx} + 2a_{12}z_{xy} + a_{22}z_{yy} + b_1z_x + b_2z_y + cz = f(x, y)$$

Die Koeffizienten $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c$ hängen im allgemeinen von x und y ab. Ist $f(x, y) \equiv 0$, dann heißt die Dgl. **homogen**, sonst **inhomogen**.

Beispiel. $yz_x + z = 0$ (lineare Dgl. 1. Ordnung für $z(x, y)$)

Wir fassen y als "Parameter" auf und erhalten $\frac{z_x}{z} = -\frac{1}{y}$.

Integration nach x liefert $\ln|z| = -\frac{x}{y} + C(y)$ bzw.

$|z| = e^{C(y)-\frac{x}{y}} = e^{C(y)}e^{-\frac{x}{y}}$ bzw. $z(x, y) = k(y)e^{-\frac{x}{y}}$.

Beispiel. $z_{xx} + z = 0$

Wir fassen wiederum y als "Parameter" auf und denken uns z_{xx} als zweite Ableitung, $z_{xx} = z''$, nach der "einzigen" Variablen x .

$z'' + z = 0 \quad \Rightarrow \quad z(x, y) = C_1(y)\cos x + C_2(y)\sin x$

Eine einfache Probe zeigt, dass dies tatsächlich die Lösung ist.

Bemerkung. Die allgemeine Lösung einer partiellen Differentialgleichung besitzt i.a. eine sehr große Funktionenmenge. Die Ordnung gibt die Anzahl der auftretenden beliebigen Funktionen an (bei gewöhnlichen Dgln. war es die Anzahl der auftretenden beliebigen Konstanten).

Definition. (Typeneinteilung) Eine homogene lineare Dgl. der Form

$$a_{11}z_{xx} + 2a_{12}z_{xy} + a_{22}z_{yy} + b_1 z_x + b_2 z_y + cz = 0$$

heißt

- **hyperbolisch**, wenn $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$
- **parabolisch**, wenn $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$
- **elliptisch**, wenn $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$

Beispiel. Die eindimensionale **Wellengleichung**

$$z_{tt} = c^2 z_{xx} \quad \text{bzw.} \quad z_{tt} - c^2 z_{xx} = 0 \quad c \ldots \text{const.}$$

ist **hyperbolisch**, weil $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = -c^2$.

Beispiel. Die eindimensionale **Wärmeleitungsgleichung, Diffusionsgleichung**

$$z_t = c^2 z_{xx} \quad \text{bzw.} \quad c^2 z_{xx} - z_t = 0$$

ist **parabolisch**, weil $a_{11} = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = c^2$.

Beispiel. Die **Potentialgleichung** (**Laplace'sche Gleichung**)

$$\Delta z = z_{xx} + z_{yy} = 0$$

ist **elliptisch**, weil $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$.

Bemerkung. Die Gleichung

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1 x + b_2 y + c = 0$$

beschreibt in der xy-Ebene eine Hyperbel, eine Parabel oder eine Ellipse (bzw. degenerierte Formen davon), daher die Typenbezeichnung.

....

Die Wellengleichung

Methode von D'ALEMBERT

Die eindimensionale Wellengleichung lautet $z_{tt} = c^2 z_{xx}$.

Behauptung. Die Funktion

$$z(x,t) = u(x+ct) + v(x-ct)$$

mit beliebigen Funktionen u und v ist die allgemeine Lösung der Wellengleichung.

Beweis. Setze $\xi = x + ct$ und $\eta = x - ct$. Dann ist $z = u(\xi) + v(\eta)$.

$$z_x = u_\xi \cdot \xi_x + v_\eta \cdot \eta_x = u_\xi + v_\eta = u'(\xi) + v'(\eta)$$

$$z_{xx} = u''(\xi) \cdot \xi_x + v''(\eta) \cdot \eta_x = u''(\xi) + v''(\eta)$$

$$z_t = u_\xi \cdot \xi_t + v_\eta \cdot \eta_t = u'(\xi) \cdot c + v'(\eta) \cdot (-c) = c \cdot (u'(\xi) - v'(\eta))$$

$$z_{tt} = c^2 \cdot (u''(\xi) + v''(\eta))$$

Daraus folgt $z_{tt} = c^2 z_{xx}$. $\square$

Die Lösung setzt sich zusammen aus einer nach links wandernden Welle (Störung) u und einer nach rechts wandernden Welle (Störung) v .

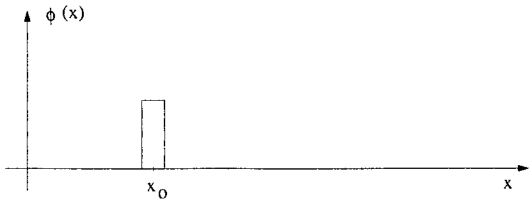


Abbildung 9.1: Ausgangszustand

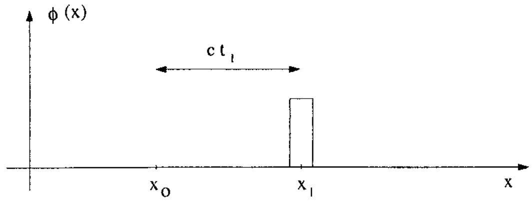


Abbildung 9.2: Nach rechts gewanderte Welle

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ sei etwa (mit $u = 0$)

$$z(x,0) = v(x) = \begin{cases} \neq 0 & \text{wenn } x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zu einem späteren Zeitpunkt $t_1 > 0$ gilt dann

$$z(x,t_1) = v(x - ct_1) = \begin{cases} \neq 0 & \text{wenn } x_0 - \varepsilon < x - ct_1 < x_0 + \varepsilon \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

An die Funktion $z(x,t)$ mit $z_{tt} = c^2 z_{xx}$, welche auch die Schwingung einer Saite beschreibt, können noch weitere Forderungen gestellt werden, nämlich **Randbedingungen** und **Anfangsbedingungen**, z.B.

1) Die Saite ist in den Randpunkten fixiert, d.h. die Auslenkung ist dort Null

$$z(0,t) = z(L,t) = 0 \quad \forall\, t \geq 0 \qquad \text{(Randbedingungen)}$$

2) Die Anfangsauslenkung $z(x,0)$ und die Anfangsgeschwindigkeit $z_t(x,0)$ sind festgelegt durch

$$z(x,0) = f(x)\ ,\ z_t(x,0) = g(x) \quad ,\ 0 \leq x \leq L \qquad \text{(Anfangsbedingungen)}$$

Bemerkung. Mit der Differentialgleichung, den Randbedingungen und den Anfangsbedingungen ist das Problem vollständig beschrieben. Es existiert eine eindeutig bestimmte Lösung.

....

Lösung mittels Fourier-Methode - Produktansatz

Die grundsätzliche Vorgangsweise ist dabei

• Produktansatz $z(x,t) = F(x) \cdot G(t)$ (Trennung von Orts- und Zeitvariablen)

• Lösen der gewöhnlichen Dgln für die Funktionen F und G unter Berücksichtigung der Randbedingungen

• Anwendung des Superpositionsprinzips zur Erfüllung der Anfangsbedingungen

a) Produktansatz

Wir setzen $z(x,t) = F(x) \cdot G(t)$ und erhalten

$$z_t = F(x) \cdot G'(t) \quad , \quad z_{tt} = F(x) \cdot G''(t)$$

$$z_x = F'(x) \cdot G(t) \quad , \quad z_{xx} = F''(x) \cdot G(t)$$

Eingesetzt in die Dgl. liefert dies

$$F(x) \cdot G''(t) = c^2 \cdot F''(x) \cdot G(t) \quad \text{bzw.} \quad \frac{G''(t)}{c^2 \cdot G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}$$

Auf der linken Seite steht nur eine Funktion von t, auf der rechten Seite nur eine Funktion von x, damit muss links und rechts eine Konstante stehen, also

$$\frac{G''(t)}{c^2 \cdot G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda \; \ldots \text{const.} \quad \text{und damit}$$

$$F''(x) - \lambda F(x) = 0 \quad , \quad G''(t) - c^2 \lambda G(t) = 0$$

Wir erhalten also 2 gewöhnliche Differentialgleichungen.

Offenbar ist $z(x,t) \equiv 0$ stets eine Lösung von $z_{tt} = c^2 z_{xx}$ (triviale Lösung). Die Frage stellt sich nun, für welche Werte von λ **nichttriviale** Lösungen existieren.

b) Lösen der gew. Dgln. unter Berücksichtigung der RB

Aus $z(0,t) = z(L,t) = 0$ folgt nun

$$z(0,t) = F(0) \cdot G(t) = 0 \quad \text{für} \; t > 0$$

$$z(L,t) = F(L) \cdot G(t) = 0 \quad \text{für} \; t > 0$$

Weil $G(t)$ nicht die Nullfunktion ist, folgt $F(0) = F(L) = 0$.

Für die Differentialgleichung $F''(x) - \lambda F(x) = 0$ wählt man den Ansatz $F(x) = e^{\sigma x}$, der die charakteristische Gleichung $\sigma^2 - \lambda = 0$ liefert.

Nun sind mehrere Fälle zu unterscheiden:

1) $\lambda > 0 \;\Rightarrow\; \sigma_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda} \;\Rightarrow\; F(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$

2) $\lambda = 0 \;\Rightarrow\; \sigma_{1,2} = 0 \;\Rightarrow\; F(x) = A + Bx$

3) $\lambda < 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -\mu^2$ mit $\mu > 0 \;\Rightarrow \sigma_{1,2} = \pm i\mu \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; F(x) = A \cos \mu x + B \sin \mu x$

Die Berücksichtigung der Randbedingungen liefert im Fall 1)

$F(0) = 0 \;\Rightarrow\; A + B = 0$

$F(L) = 0 \;\Rightarrow\; Ae^{\sqrt{\lambda}L} + Be^{-\sqrt{\lambda}L} = 0$ und damit

$A = B = 0$ und $F(x) \equiv 0$

Im Fall 2) ergibt sich

$F(0) = 0 \;\Rightarrow\; A = 0$

$F(L) = 0 \;\Rightarrow\; A + B \cdot L = 0 \;\Rightarrow\; A = B = 0 \;\Rightarrow\; F(x) \equiv 0$

Im Fall 3) erhalten wir

$F(0) = 0 \;\Rightarrow\; A = 0$

$F(L) = 0 \;\Rightarrow A \cdot \cos(\mu L) + B \cdot \sin(\mu L) = 0 \;\Rightarrow\; B \cdot \sin(\mu L) = 0$

Der Fall $B = 0$ und damit $F(x) \equiv 0$ ist uninteressant.

Ansonsten $\sin(\mu L) = 0 \;\Leftrightarrow\; \mu L = n\pi\ ,\ n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \mu = \frac{n\pi}{L} = \mu_n$

Dies führt auf die **Eigenwerte** $\lambda_n = -(\mu_n)^2 = -(\frac{n\pi}{L})^2$

und die zugehörigen **Eigenfunktionen** $F_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L}x$.

Die Differentialgleichung $G'' - c^2\lambda G = 0$ lautet nun mit $\lambda = -(\frac{n\pi}{L})^2$

$G'' + c^2(\frac{n\pi}{L})^2 G = 0$

Der Exponentialansatz liefert dafür die Lösung

$G(t) = A \cdot \cos \frac{cn\pi}{L}t + B \cdot \sin \frac{cn\pi}{L}t = G_n(t)$.

c) Superpositionsprinzip, Erfüllen der AB

Wir haben nun Lösungen erhalten in der Form

$z_n(x,t) = F_n(x) \cdot G_n(t) = (A_n \cos \frac{cn\pi}{L}t + B_n \sin \frac{cn\pi}{L}t) \sin \frac{n\pi}{L}x \quad , \ n \in \mathbb{N}$,

welche jeweils die RB erfüllen.

Daraus bilden wir die Funktion

$z(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \frac{cn\pi}{L}t + B_n \sin \frac{cn\pi}{L}t) \sin \frac{n\pi}{L}x$

Diese Funktion ist ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung, welche die RB erfüllt.

Nun müssen die Konstanten A_n, B_n so bestimmt werden, dass auch noch die AB erfüllt werden.

Einerseits soll gelten $z(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x)$.

Anderseits soll wegen

$z_t(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-A_n \frac{cn\pi}{L} \sin \frac{cn\pi}{L} t + B_n \frac{cn\pi}{L} \cos \frac{cn\pi}{L} t) \sin \frac{n\pi}{L} x$ gelten, dass

$z_t(x,0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n \frac{cn\pi}{L} \sin \frac{n\pi}{L} x = g(x)$

Die Funktionen $f(x), g(x)$ müssen natürlich so beschaffen sein, dass sie die RB erfüllen, d.h. $f(0) = f(L) = 0$, $g(0) = g(L) = 0$ und in $[0, L]$ stückweise stetig differenzierbar sind.

Jetzt werden die auf $[0, L]$ erklärten Funktionen $f(x), g(x)$ auf $[-L, L]$ **schiefsymmetrisch** fortgesetzt, und dann periodisch mit $T = 2L$ auf ganz $\mathbb{R}$. Also

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \tfrac{n\pi}{L} x \quad \text{mit} \quad a_n = \tfrac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \tfrac{n\pi}{L} x \; dx$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \tfrac{n\pi}{L} x \quad \text{mit} \quad b_n = \tfrac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \tfrac{n\pi}{L} x \; dx$$

Aus den AB folgt nun durch Koeffizientenvergleich

$$A_n = a_n = \tfrac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \tfrac{n\pi}{L} x \; dx \quad \text{sowie}$$

$$B_n \tfrac{cn\pi}{L} = b_n \;\Rightarrow\; B_n = \tfrac{L}{cn\pi} b_n = \tfrac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \sin \tfrac{n\pi}{L} x \; dx$$

Zusammenfassung. Die eindeutig bestimmte Lösung des Problems ist gegeben durch

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \tfrac{cn\pi}{L} t + B_n \sin \tfrac{cn\pi}{L} t) \sin \tfrac{n\pi}{L} x \quad \text{mit}$$

$$A_n = \tfrac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \tfrac{n\pi}{L} x \, dx \quad , \quad B_n = \tfrac{2}{cn\pi} \int_0^L g(x) \sin \tfrac{n\pi}{L} x \, dx$$

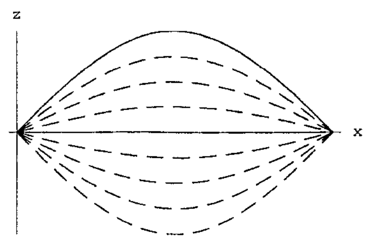
Wir setzen nun $\omega_n = \frac{cn\pi}{L}$ und betrachten die einzelnen Summanden

$$z_n(x,t) = (A_n \cos \tfrac{cn\pi}{L} t + B_n \sin \tfrac{cn\pi}{L} t) \sin \tfrac{n\pi}{L} x =$$

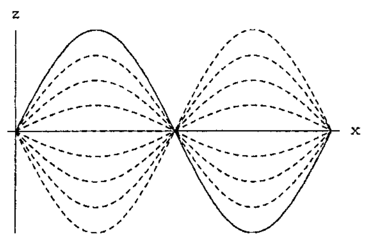
$$= (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \tfrac{n\pi}{L} x = u_n(t) \sin \tfrac{n\pi}{L} x$$

Für $n = 1$ ist $z_1(x,t) = u_1(t) \sin \frac{\pi}{L} x$. Hier wird die Sinus-Funktion mit einem zeitabhängigen, periodischen Faktor $u_1(t)$ multipliziert, der die Kreisfrequenz $\omega_1 = \frac{c\pi}{L}$ besitzt. (**Grundschwingung**)

Für $n = 2$ ist $z_2(x,t) = u_2(t) \sin \frac{2\pi}{L} x$. Auch hier wird die Sinus-Funktion mit einem zeitabhängigen, periodischen Faktor $u_2(t)$ multipliziert, der die Kreisfrequenz $\omega_2 = \frac{2c\pi}{L}$ besitzt. (**1. Oberschwingung**)



Grundschwingung



1. Oberschwingung

Aus den Kreisfrequenzen ω_n ergeben sich die Frequenzen ν_n durch $\omega_n = 2\pi\nu_n$. Damit

$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{cn\pi}{L} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{cn}{2L} = n\nu_1$.

Die verschiedenen Frequenzen ν_n , mit denen die Saite schwingt, sind also ein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz ν_1 .

. . . .

Inhomogene Wellengleichung mit inhomogenen RB

Wir betrachten nun für $0 \leq x \leq L$, $t \geq 0$ das Problem

$$z_{tt} = c^2 z_{xx} + \varphi(x,t)$$

$$z(0,t) = r(t) \quad , \quad z(L,t) = s(t) \qquad (\mathbf{RB})$$

$$z(x,0) = f(x) \quad , \quad z_t(x,0) = g(x) \qquad (\mathbf{AB})$$

a) Elimination der inhomogenen RB

Wir treffen den Ansatz $z(x,t) = y(x,t) + w(x,t)$ mit

$w(x,t) = r(t) + \frac{x}{L}(s(t) - r(t))$.

Dann gilt: $w(0,t) = r(t)$, $w(L,t) = s(t)$, $w_{xx} = 0$. Weiters

$$r(t) = z(0,t) = y(0,t) + w(0,t) = y(0,t) + r(t) \;\Rightarrow\; y(0,t) = 0$$

$$s(t) = z(L,t) = y(L,t) + w(L,t) = y(L,t) + s(t) \;\Rightarrow\; y(L,t) = 0$$

In die Dgl. $z_{tt} = c^2 z_{xx} + \varphi(x,t)$ eingesetzt erhalten wir

$y_{tt} + w_{tt} = c^2(y_{xx} + w_{xx}) + \varphi(x,t) = c^2 y_{xx} + \varphi(x,t)$ bzw.

$$y_{tt} = c^2 y_{xx} + (\varphi(x,t) - w_{tt}) = c^2 y_{xx} + \varphi^*(x,t)$$

Die Anfangsbedingungen liefern

$$z(x,0) = y(x,0) + w(x,0) = f(x) \;\Rightarrow\; y(x,0) = f(x) - w(x,0) = f^*(x)$$

$$z_t(x,0) = y_t(x,0) + w_t(x,0) = g(x) \;\Rightarrow\; y_t(x,0) = g(x) - w_t(x,0) = g^*(x)$$

Zusammenfassung. Die Funktion $y(x,t)$ genügt dem Problem

$y_{tt} = c^2 y_{xx} + \varphi^*(x,t)$ (inhomogene Dgl.)

$y(0,t) = y(L,t) = 0$ (homogene RB)

$y(x,0) = f^*(x)$, $y_t(x,0) = g^*(x)$ (AB)

b) Ansatz: $y(x,t) = u(x,t) + v(x,t)$

Dabei seien die Funktionen $u(x,t)$, $v(x,t)$ so gewählt, dass $u(x,t)$ Lösung der zugehörigen homogenen Dgl. ist (mit homogenen RB und inhomogenen AB), und $v(x,t)$ Lösung der inhomogenen Dgl. ist (mit homogenen RB und homogenen AB).

Wir betrachten also die Probleme

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

$$u(x,0) = f^*(x) \quad , \quad u_t(x,0) = g^*(x)$$

bzw.

$$v_{tt} = c^2 v_{xx} + \varphi^*(x,t)$$

$$v(0,t) = v(L,t) = 0$$

$$v(x,0) = 0 \quad , \quad v_t(x,0) = 0$$

c) Bestimmung von $u(x,t)$:

Gemäß vorher (siehe Fourier-Methode).

d) Bestimmung von $v(x,t)$:

Wegen der homogenen RB treffen wir den Ansatz

$v(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x$. Dann ist

$$v_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n''(t) \sin \frac{n\pi}{L} x \quad , \quad v_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)(\tfrac{n\pi}{L})^2 v_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Eingesetzt in die Dgl. $v_{tt} - c^2 v_{xx} = \varphi^*(x,t)$ erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(v_n''(t) + c^2 \frac{n^2\pi^2}{L^2} v_n(t)\right) \sin \frac{n\pi}{L} x = \varphi^*(x,t) \ .$$

Wir setzen nun $\varphi^*(x,t)$ bzgl. der Variablen x schiefsymmetrisch auf $-L < x < L$ fort und betrachten dann $\varphi^*(x,t)$ als periodische Funktion mit der Periode $T = 2L$. Dadurch ergibt sich eine Fourier-Sinusreihe für φ^* . Weiters wird t als Parameter aufgefasst.

$$\varphi^*(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \sin \tfrac{n\pi}{L} x \quad , \quad \varphi_n(t) = \tfrac{2}{L} \int_0^L \varphi^*(x,t) \sin \tfrac{n\pi}{L} x \; dx$$

Koeffizientenvergleich liefert jeweils eine gewöhnliche Dgl. 2. Ordnung für $v_n(t)$, nämlich

$$v_n''(t) + c^2 \tfrac{n^2\pi^2}{L^2} v_n(t) = \varphi_n(t) \quad , \; n \in \mathbb{N}$$

Die Auswertung der AB ergibt

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(0) \sin \tfrac{n\pi}{L} x = 0 \quad \forall \; x \;\; \forall \; n \quad \Rightarrow \quad v_n(0) = 0 \quad \forall \; n$$

$$v_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n'(0) \sin \tfrac{n\pi}{L} x = 0 \quad \forall \; x \;\; \forall \; n \quad \Rightarrow \quad v_n'(0) = 0 \quad \forall \; n$$

Somit erhalten wir für die Funktionen $v_n(t)$ die Anfangswertprobleme

$$v_n'' + (\tfrac{cn\pi}{L})^2 v_n = \varphi_n(t) \quad , \quad v_n(0) = v_n'(0) = 0$$

. . . .

Die Wärmeleitungs- oder Diffusionsgleichung

Im (allgemeinen) Wärmeleitungsproblem betrachtet man einen Körper, der einen räumlichen Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ausfüllt. Die Temperaturverteilung im Körper sei gegeben durch die Funktion

$$z = z(x_1, x_2, x_3, t) \qquad (x_1, x_2, x_3) \in B \; , \; t > 0 \; .$$

Ist der Körper an der Oberfläche isoliert, dann liegt das folgende Problem vor

$$z_t = c^2 \Delta z = c^2 (z_{x_1x_1} + z_{x_2x_2} + z_{x_3x_3})$$

$$z(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \quad \text{für} \quad (x_1, x_2, x_3) \in \partial B \;\; , \; t > 0 \qquad (\mathbf{RB})$$

$$z(x_1, x_2, x_3, 0) = f(x_1, x_2, x_3) \quad \text{für} \quad (x_1, x_2, x_3) \in B \qquad (\mathbf{AB})$$

Dieses Problem ist für beliebige Bereiche analytisch nicht lösbar.

Wir beschränken uns hier auf den eindimensionalen Fall, d.h. wir betrachten einen (unendlich dünnen) Stab der Länge L , und untersuchen zuerst den Fall einer homogenen Dgl. mit homogenen Randbedingungen (d.h. die Temperatur ist an den Enden $T=0$). Also

$$z_t = c^2 z_{xx} \quad , \; 0 \le x \le L \; , \; t > 0 \qquad \textbf{(DGL.)}$$

$$z(0,t) = z(L,t) = 0 \quad , \; t > 0 \qquad (\textbf{RB})$$

$$z(x,0) = f(x) \quad , \; 0 \le x \le L \qquad (\textbf{AB})$$

a) Trennung der Variablen

Der Ansatz $\quad z(x,t) = F(x)G(t) \quad$ liefert

$F \cdot G' = c^2 \cdot F'' \cdot G \quad \Rightarrow \quad \frac{G'}{c^2 G} = \frac{F''}{F} = -\mu^2$

$\mu > 0$ heißt Separationsparameter, und nur der Fall, wo die rechte Seite negativ ist, liefert nichttriviale Lösungen (also wenn die rechte Seite die Form $-\mu^2$ hat).

Wir erhalten nun zwei gewöhnliche Dgln.

$$F'' + \mu^2 F = 0 \qquad \text{und} \qquad G' + c^2\mu^2 G = 0$$

b) Lösen der gew. Dgln. mit RB

$z(0,t) = F(0) \cdot G(t) = 0 \quad \forall\, t \quad \Rightarrow \quad F(0) = 0$

$z(L,t) = F(L) \cdot G(t) = 0 \quad \forall\, t \quad \Rightarrow \quad F(L) = 0$

Die Dgl. $F'' + \mu^2 F = 0$ besitzt nichttriviale Lösungen für $\mu = \mu_n = \frac{n\pi}{L}$ mit den zugehörigen Funktionen $F_n(x) = \sin \frac{n\pi}{L} x \quad , \; n \in \mathbb{N}$.

Diese μ_n's werden in die Dgl. $G' + c^2\mu^2 G = 0$ eingesetzt, und liefern die Lösungen

$$G_n(t) = B_n e^{-c^2\mu^2 t} = B_n e^{-\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \quad , \; n \in \mathbb{N} \; .$$

Damit erhalten wir Lösungen

$$z_n(x,t) = F_n(x) \cdot G_n(t) = G_n(t) \cdot F_n(x) = B_n e^{-\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Daraus bilden wir durch Superposition die Funktion

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \cdot \sin \tfrac{n\pi}{L} x$$

welche die Dgl. und die RB erfüllt.

c) Berücksichtigung der AB

Aus $z(x,0) = f(x)$ folgt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{L} x = f(x)$.

Wir setzen $f(x)$ schiefsymmetrisch auf $-L < x < L$ fort, und betrachten dann f als periodische Funktion mit der Periode $2L$. Damit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \tfrac{n\pi}{L} x \quad \text{mit} \quad a_n = \tfrac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \tfrac{n\pi}{L} x \, dx$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt $B_n = a_n$, und folglich

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \cdot \sin \tfrac{n\pi}{L} x \quad \text{mit} \quad B_n = \tfrac{2}{L} \int_0^L f(\xi) \sin \tfrac{n\pi}{L} \xi \, d\xi$$

Beispiel.

$$z_t = c^2 z_{xx} \quad , \quad 0 \le x \le L \ , \ t > 0$$

$$z(0,t) = z(L,t) = 0 \qquad \text{(RB)}$$

$$z(x,0) = f(x) \quad , \quad 0 \le x \le L \quad , \ \text{mit}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } 0 \leqslant x < \frac{L}{2} \\ L - x & \text{falls } \frac{L}{2} \leqslant x \leqslant L \end{cases}$$

Die Lösung ist

$$z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2} t} \cdot \sin \tfrac{n\pi}{L} x \quad \text{mit} \quad B_n = \tfrac{2}{L} \int_0^L f(\xi) \sin \tfrac{n\pi}{L} \xi \, d\xi$$

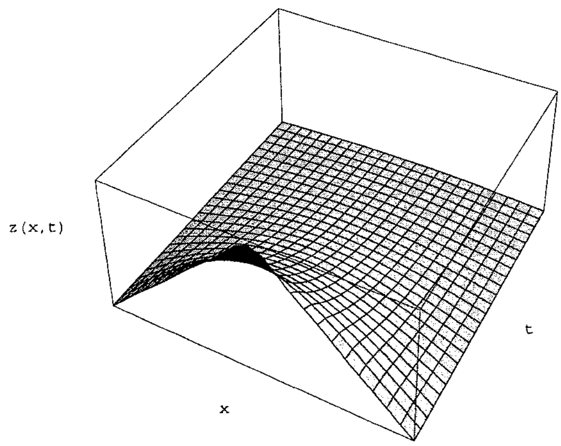
$$B_n = \tfrac{2}{L} \Big(\int_0^{\frac{L}{2}} \xi \sin \tfrac{n\pi}{L} \xi \, d\xi + \int_{\frac{L}{2}}^{L} (L - \xi) \sin \tfrac{n\pi}{L} \xi \, d\xi \Big) \quad \text{und weiters}$$

$B_n = 0 \quad \text{für} \quad n = 2m$

$B_n = \frac{2}{L} \cdot \frac{2(-1)^m L^2}{(2m+1)^2\pi^2} = \frac{4(-1)^m L}{(2m+1)^2\pi^2} \quad \text{für} \quad n = 2m+1 \quad , \quad m \geq 0$

Also ist

$$z(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4(-1)^m L}{(2m+1)^2\pi^2} e^{-\frac{c^2(2m+1)^2\pi^2}{L^2}t} \cdot \sin \frac{(2m+1)\pi}{L} x$$



. . . .

Inhomogene Differentialgleichung mit homogenen RB

$$u_t = c^2 u_{xx} + \varphi(x,t) \quad , \quad 0 \leq x \leq L \quad , \quad t > 0 \qquad (\textbf{DGL.})$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \quad , \quad t > 0 \qquad (\textbf{RB})$$

$$u(x,0) = f(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq L \qquad (\textbf{AB})$$

Wir treffen den Ansatz $u(x,t) = w(x,t) + z(x,t)$, wobei $w(x,t)$ Lösung der (zugehörigen) homogenen Dgl. mit homogenen RB und gegebenen AB ist (Lösungsverfahren siehe vorher).

$z(x,t)$ ist Lösung der inhomogenen Dgl. mit homogenen RB und **homogenen** (!) AB.

Wir verwenden den Ansatz $z(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x$ und entwickeln $\varphi(x,t)$ in eine Fourierreihe bzgl. x ,

$$\varphi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \sin \tfrac{n\pi}{L} x \quad , \quad \varphi_n(t) = \tfrac{2}{L} \int_0^L \varphi(x,t) \sin \tfrac{n\pi}{L} x \; dx$$

Einsetzen in die inhomogene Dgl. und Koeffizientenvergleich liefert jeweils eine gewöhnliche Dgl. für $Z_n(t)$, nämlich

$$Z_n'(t) + \tfrac{c^2 n^2 \pi^2}{L^2} Z_n(t) = \varphi_n(t) \quad \text{mit der AB : } \; Z_n(0) = 0 \; .$$

. . . .

Inhomogene Differentialgleichung mit inhomogenen RB

$$u_t = c^2 u_{xx} + \varphi(x,t) \quad , \; 0 \le x \le L \; , \; t > 0 \qquad (\textbf{DGL.})$$
$$u(0,t) = r(t) \; , \quad u(L,t) = s(t) \quad , \; t > 0 \qquad (\textbf{RB})$$
$$u(x,0) = f(x) \quad , \; 0 \le x \le L \qquad (\textbf{AB})$$

Wir verwenden den Ansatz $u(x,t) = w(x,t) + z(x,t)$ mit

$z(x,t) = r(t) + \frac{x}{L}(s(t) - r(t))$ zur Elimination der inhomogenen RB.

Daraus ergibt sich für $w(x,t)$ das Problem

$$w_t = c^2 w_{xx} + \varphi^*(x,t)$$
$$w(0,t) = w(L,t) = 0$$
$$w(x,0) = f^*(x)$$

mit $\varphi^*(x,t) = \varphi(x,t) - z_t(x,t) \;\; , \;\; f^*(x) = f(x) - z(x,0)$.

Dieses Problem wird gemäß vorher behandelt.