Mathematik 2 SS 2020

1. Übungsblatt – Gruppe A

1. Man ermittle die Gleichung der Geraden, die die folgende Bedingung erfüllt: (1)

   a) Durch $P(2,3)$, Steigung $k=-1$.
   b) Durch $P(2,1)$ und $Q(5,1)$.
   c) Durch $P(2,3)$ parallel zur Geraden $2x-y=4$.

2. Man fertige eine Skizze des Graphen der durch die folgenden Gleichungen gegebenen Kurven an und bestimme den Charakter des Kurve (Gerade, Parabel, Hyperbel oder Ellipse). Man bestimme charakteristische Punkte und eventuell die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. (1)

   a) $3x-2y=6$
   b) $x^2+(y+1)^2=4$
   c) $x^2+\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$

3. Wie in Beispiel 2. (1)

   a) $y=2x^2-4x+3$
   b) $x=y^2$
   c) $y=\sqrt{x}$
   d) $x=\sqrt{y+1}-1$
   e) $y=\dfrac{1}{x-2}$

4. Man bestimme die erste Ableitung der folgenden Funktionen. (1)

$$\text{a)}\quad f(x)=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\,,\qquad \text{b)}\quad f(x)=\frac{1}{(ax+b)^x}$$

5. Man bestimme die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren).

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sqrt{x+4}}{\cos(2x)-1}\ (1)\qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)\ (1)$$

6. Man diskutiere die folgenden Funktionen (Definitionsbereich, Nullstellen, relative Extrema, Polstellen, Skizze). je (1)

$$\text{a)}\quad f(x)=(x^2-1)\,e^{-x}\,,\qquad \text{b)}\quad f(x)=\frac{x^2}{x+1}\,,\qquad \text{c)}\quad f(x)=\tanh\frac{1}{x}$$

7. Man berechne folgende Integrale je (1)

$$\text{a)}\ \int\frac{x}{e^{2x}}\,dx\,,\quad \text{b)}\ \int\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x^{2/3}}\,dx\,,\quad \text{c)}\ \int\frac{4}{(x-1)(x^2+1)}\,dx\,,\quad \text{d)}\ \int(\sin(nx))^3\,dx\,,n\in\mathbb{N}$$

8. Man berechne folgendes Integral (1)

$$\int_3^4 x\sqrt{25-x^2}\,dx$$

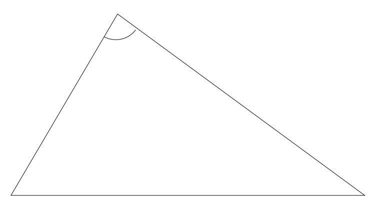
9. Man bestimme folgendes uneigentliches Integral, falls es existiert. (1)

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

10. Man ermittle den Flächeninhalt des von den folgenden Kurven begrenzten Flächenstücks. Man skizziere den Bereich. (1)

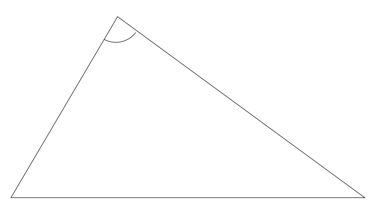
$$y^2 = 4x,\ y = 2x - 4$$

11. Vorgelegt ist das rechtwinkelige Dreieck ABC.



Die Länge der Seite c wird exakt gemessen mit $c = 10$m, der Winkel α wird mit $40°$ und einem möglichen Fehler von $1°$ angegeben.
Man berechne die Länge der Seite b und den absoluten und den relativen Fehler des berechneten Wertes. (1)

12. Vorgelegt ist das rechtwinkelige Dreieck ABC.



Die Länge der Seite a wird exakt gemessen mit $a = 10$m, der Winkel β wird mit $30°$ und einem möglichen Fehler von $1°$ angegeben.
Man berechne die Länge der Seite b und den absoluten und den relativen Fehler des berechneten Wertes. (1)

13. Man bestimme die partiellen Ableitungen f_{xx}, f_{xy} und f_{yy} der folgenden Funktion. je 1

$$\text{(a)} \quad f(x,y) = \frac{x}{x+y}$$

$$\text{(b)} \quad f(x,y) = y\sqrt{x^2 - y^2}$$

$$\text{(c)} \quad f(x,y) = \sin\frac{x}{\sqrt{y}} + \cos\frac{y}{\sqrt{x}}$$

14. Man überprüfe, ob die Funktion

$$\text{(a)} \quad u = \sin(x - ct) + \ln(x + ct)$$

$$\text{(b)} \quad u = \cos x\,(\sin(ct) + \cos(ct))$$

eine Lösung der Wellengleichung $u_{tt} = c^2\,u_{xx}$ ist. je 1

15. Man bestimme die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x,y)$ im Punkt P für je 1

$$\text{(a)} \quad f(x,y) = \cos(x^2 + y^2)\,, \; P(0, \sqrt{\pi}, -1)$$

$$\text{(b)} \quad f(x,y) = \sin\frac{\sqrt{x+2}}{y^2}\,, \; P(-1, 1/\sqrt{\pi}, 0)$$

16. Man bestimme die Richtungsableitung der folgenden Funktion im Punkt P in Richtung des Vektors $\vec{r}$. 1

$$f(x,y) = \ln(2x + 3y)\,, \; P(-1,1), \; \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

17. Gegeben ist die Funktion 1

$$f(x,y,z) = x^2\,y^2\,z$$

und die Vektorfunktion

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xyz \\ -z^2 \\ 2xz^2 \end{pmatrix}$$

Man berechne

$$\operatorname{grad} f\,, \quad \operatorname{div}\vec{v}\,, \quad \operatorname{rot}\vec{v}\,, \quad \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$

Mathematik 2 SS 2020

1. Übungsblatt – Gruppe B

1. Man ermittle die Gleichung der Geraden, die die folgende Bedingung erfüllt: **1**

   a) Durch $P(1,-2)$, Steigung $k=3$.
   b) Durch $P(3,-2)$ und $Q(3,2)$.
   c) Durch $P(-1,2)$ parallel zur Geraden $6x+2y=5$.

2. Man fertige eine Skizze des Graphen der durch die folgenden Gleichungen gegebenen Kurven an und bestimme den Charakter des Kurve (Gerade, Parabel, Hyperbel oder Ellipse). Man bestimme charakteristische Punkte und eventuell die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. **1**

   a) $x+3y=6$
   b) $x^2+y^2+4y=0$
   c) $\dfrac{(x+1)^2}{1^2}+\dfrac{(y-3)^2}{3^2}=1$

3. Wie in Beispiel 2. **1**

   a) $y=-x^2+4$
   b) $x=-y^2+3y-2$
   c) $y=\sqrt{x+4}$
   d) $x-\sqrt{2y-y^2}=0$
   e) $y=\dfrac{1}{x+1}$

4. Man bestimme die erste Ableitung der folgenden Funktionen. **1**

$$\text{a)}\quad f(x)=\ln\frac{ax+b}{cx+d}\,,\qquad \text{b)}\quad f(x)=\sqrt{(ax+b)^x}$$

5. Man bestimme die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren)

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(2x)-1}{x^2\sqrt{x+4}}\ \textbf{1}\qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to 0}(\cot x)^{\sin x}\ \textbf{1}$$

6. Man diskutiere die folgenden Funktionen (Definitionsbereich, Nullstellen, relative Extrema, Polstellen, Skizze). je **1**

$$\text{a)}\quad f(x)=x^2\,e^x\,,\quad \text{b)}\quad f(x)=x^3-\frac{48}{x}\,,\quad \text{c)}\quad f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

7. Man berechne folgende Integrale je **1**

$$\text{a)}\ \int\frac{x}{e^{2x}}\,dx\,,\quad \text{b)}\ \int\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x^{2/3}}\,dx\,,\quad \text{c)}\ \int\frac{4}{(x-1)(x^2+1)}\,dx\,,\quad \text{d)}\ \int(\cos(nx))^3\,dx\,,n\in\mathbb{N}$$

8. Man berechne folgendes Integral (1)

$$\int_0^4 \frac{x}{(x^2+9)^2}\,dx$$

9. Man bestimme folgendes uneigentliches Integral, falls es existiert. (1)

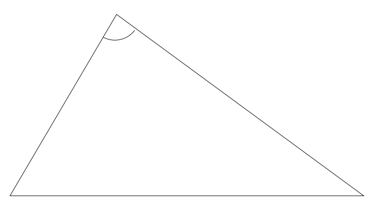
$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

10. Man ermittle den Flächeninhalt des von den folgenden Kurven begrenzten Flächenstücks. Man skizziere den Bereich. (1)

$$y = 6x - x^2,\ y = x^2 - 2x$$

11. Der Radius einer Kugel wird mit dem Wert $r = 21$cm gemessen, wobei der Messfehler maximal 0.05cm beträgt. Man ermittle den maximalen Fehler, der bei der Berechnung des Volumens dieser Kugel auf Grund des Messfehlers auftreten kann. (1)

12. Vorgelegt ist das rechtwinkelige Dreieck ABC.



Die Länge der Seite b wird exakt gemessen mit $b = 15$m, der Winkel α wird mit $60°$ und einem möglichen Fehler von $1°$ angegeben.
Man berechne die Länge der Seite a und den absoluten und den relativen Fehler des berechneten Wertes. (1)

13. Man bestimme die partiellen Ableitungen f_{xx}, f_{xy} und f_{yy} der Funktion je (1)

(a) $f(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2}$

(b) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{y}$

(c) $f(x,y) = \tan\dfrac{x}{\sqrt{y}} + \cot\dfrac{y}{\sqrt{x}}$

14. Man überprüfe, ob die Funktion

$$\text{(a)} \quad u = 1 + xy + \ln\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\text{(b)} \quad u = e^{kx}\left(\cos(ky) + \sin(ky)\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

eine Lösung der Potentialgleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ist. je **1**

15. Man bestimme die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x,y)$ im Punkt P. je **1**

$$\text{(a)} \quad f(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2}\,,\ P(3,-4,-5)$$

$$\text{(b)} \quad f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}\,,\ P(\sqrt{5},0,2)$$

16. Man bestimme die Richtungsableitung der folgenden Funktion im Punkt P in Richtung des Vektors $\vec{r}$. **1**

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2\,,\ P(1,2),\ \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

17. Gegeben ist die Funktion **1**

$$f(x,y,z) = x^2\,y\,z^2$$

und die Vektorfunktion

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz \\ -y^2 \\ 2x^2y \end{pmatrix}$$

Man berechne

$$\operatorname{grad} f\,, \quad \operatorname{div}\vec{v}\,, \quad \operatorname{rot}\vec{v}\,, \quad \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$

Mathematik 2 SS 2020

1. Übungsblatt – Gruppe C

1. Man ermittle die Gleichung der Geraden, die die folgende Bedingung erfüllt: 1

   a) Durch $P(-1,2)$, Steigung $k = 1/3$.
   b) Durch $P(-1,2)$ und $Q(-3,-1)$.
   c) Durch $P(3,2)$ parallel zur x-Achse.

2. Man fertige eine Skizze des Graphen der durch die folgenden Gleichungen gegebenen Kurven an und bestimme den Charakter des Kurve (Gerade, Parabel, Hyperbel oder Ellipse). Man bestimme charakteristische Punkte und eventuell die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. 1

   a) $2x - 3y = 6$
   b) $(x-1)^2 + y^2 = 1$
   c) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

3. Wie in Beispiel 2. 1

   a) $y = x^2 + 2x + 2$
   b) $x = -y^2$
   c) $x = -\sqrt{y}$
   d) $y = -\sqrt{9 - x^2}$
   e) $y = \dfrac{1}{(x+1)^2}$

4. Man bestimme die erste Ableitung der folgenden Funktionen. 1

$$\text{a)} \quad f(x) = \sin\frac{ax+b}{cx+d}\,, \quad \text{b)} \quad f(x) = \ln\left((ax+b)^x\right)$$

5. Man bestimme die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren)

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 2x}{x^2\sqrt{2x+1}} \quad ① \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to 0^+} (e^x - 1)^x \quad ①$$

6. Man diskutiere die folgenden Funktionen (Definitionsbereich, Nullstellen, relative Extrema, Polstellen, Skizze). je 1

$$\text{a)} \quad f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}\,, \quad \text{b)} \quad f(x) = \frac{6\,x^{1/3}}{x^2+5}\,, \quad \text{c)} \quad f(x) = x \cdot \ln(x)$$

7. Man berechne folgende Integrale je 1

$$\text{a)} \int \sqrt{x}\ln x\,dx\,, \quad \text{b)} \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx\,, \quad \text{c)} \int \frac{x^2+2x-1}{x^3-x}\,dx\,, \quad \text{d)} \int (\cos x)^3\,dx$$

8. Man berechne folgendes Integral ①

$$\int_0^1 \frac{x}{1+4x^2}\,dx$$

9. Man bestimme folgendes uneigentliches Integral, falls es existiert. ①

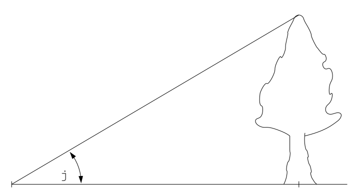
$$\int_1^3 \frac{x dx}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

10. Man ermittle den Flächeninhalt des von den folgenden Kurven begrenzten Flächenstücks. Man skizziere den Bereich. ①

$$y^2 = 4x,\ y = 2x - 4$$

11. Der Radius einer Kugel wird mit dem Wert $r = 21$cm gemessen, wobei der Messfehler maximal 0.05cm beträgt. Man ermittle den maximalen Fehler, der bei der Berechnung des Volumens dieser Kugel auf Grund des Messfehlers auftreten kann. ①

12. Die Höhe eines Baumes wird dadurch bestimmt, dass man den Höhenwinkel φ zur Spitze des Baumes von einem Punkt, der $a = 22$m vom Baum entfernt ist, misst.



Man berechne die Höhe des Baumes und den absoluten und den relativen Fehler des berechneten Wertes, wenn der Winkel φ mit 30° und einem möglichen Fehler von 1° gemessen wird. ①

13. Man bestimme die partiellen Ableitungen f_{xx}, f_{xy} und f_{yy} der Funktion je ①

$$\text{(a)}\quad f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\text{(b)}\quad f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$$

$$\text{(c)}\quad f(x,y) = e^{x^2\sqrt{x+y}}$$

14. Man überprüfe, ob die Funktion

$$\text{(a)} \quad u = \sin(x - ct) + \ln(x + ct)$$

$$\text{(b)} \quad u = \cos x\ (\sin(ct) + \cos(ct))$$

eine Lösung der Wellengleichung $u_{tt} = c^2\, u_{xx}$ ist. je 1

15. Man bestimme die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt P. je 1

$$\text{(a)} \quad f(x, y) = x^3 + y^3\,,\ P(2, -1, 7)$$

$$\text{(b)} \quad f(x, y) = y^2 - x^2 - 4x + 3y + 5\,,\ P(0, 0, 5)$$

16. Man bestimme die Richtungsableitung der folgenden Funktion im Punkt P in Richtung des Vektors $\vec{r}$. 1

$$f(x, y) = x\, y^2\,,\ \ P(3, 2),\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

17. Gegeben ist die Funktion 1

$$f(x, y, z) = x\, y^2\, z^2$$

und die Vektorfunktion

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \\ -x^2 \\ 2x^2 z \end{pmatrix}$$

Man berechne

$$\operatorname{grad} f\,, \quad \operatorname{div} \vec{v}\,, \quad \operatorname{rot} \vec{v}\,, \quad \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$

Mathematik 2 SS 2020

1. Übungsblatt – Gruppe D

1. Man ermittle die Gleichung der Geraden, die die folgende Bedingung erfüllt: **1**

   a) Durch $P(2,3)$, Steigung $k = -1$.
   b) Durch $P(2,1)$ und $Q(5,1)$.
   c) Durch $P(2,3)$ parallel zur Geraden $2x - y = 4$.

2. Man fertige eine Skizze des Graphen der durch die folgenden Gleichungen gegebenen Kurven an und bestimme den Charakter des Kurve (Gerade, Parabel, Hyperbel oder Ellipse). Man bestimme charakteristische Punkte und eventuell die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. **1**

   a) $3x - 2y = 6$
   b) $x^2 + (y+1)^2 = 4$
   c) $x^2 + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$

3. Wie in Beispiel 2. **1**

   a) $y = -x^2 + 4$
   b) $x = -y^2 + 3y - 2$
   c) $y = \sqrt{x+4}$
   d) $x - \sqrt{2y - y^2} = 0$
   e) $y = \dfrac{1}{x+1}$

4. Man bestimme die erste Ableitung der folgenden Funktionen. **1**

$$\text{a)} \quad f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad \text{b)} \quad f(x) = (ax+b)^x$$

5. Man bestimme die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren)

$$\text{a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - 1}{x^2\sqrt{x+4}} \quad \textbf{1} \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to 0} (\cot x)^{\sin x} \quad \textbf{1}$$

6. Man diskutiere die folgenden Funktionen (Definitionsbereich, Nullstellen, relative Extrema, Polstellen, Skizze) je **1**

$$\text{a)} \quad f(x) = x^2\sqrt{x+1}\,, \quad \text{b)} \quad f(x) = x(x^2-3)\,, \quad \text{c)} \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

7. Man berechne folgende Integrale. je **1**

$$\text{a)} \int x\,\cos 5x\,dx\,, \quad \text{b)} \int x\,e^{x^2}\,dx\,, \quad \text{c)} \int \frac{x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}\,dx\,, \quad \text{d)} \int (\sin x)^3\,dx$$

8. Man berechne folgendes Integral 1

$$\int_3^4 \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}\, dx$$

9. Man bestimme folgendes uneigentliches Integral, falls es existiert. 1

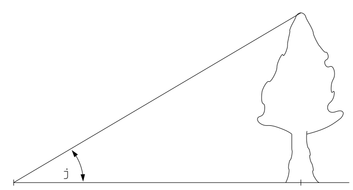
$$\int_1^3 \frac{x\, dx}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

10. Man ermittle den Flächeninhalt des von den folgenden Kurven begrenzten Flächenstücks. Man skizziere den Bereich. 1

$$y = x^4 - 4x^2, \ y = 4x^2$$

11. Man berechne den maximalen relativen Fehler bei der Bestimmung des Volumens eines Würfels mit der Kantenlänge $a = 1$m, wenn die Länge der Kante auf 3% genau gemessen wurde. 1

12. Die Höhe eines Baumes wird dadurch bestimmt, dass man den Höhenwinkel φ zur Spitze des Baumes von einem Punkt, der $a = 22$m vom Baum entfernt ist, misst.



Man berechne die Höhe des Baumes und den absoluten und den relativen Fehler des berechneten Wertes, wenn der Winkel φ mit 30° und einem möglichen Fehler von 1° gemessen wird. 1

13. Man bestimme die partiellen Ableitungen f_{xx}, f_{xy} und f_{yy} der Funktion je 1

$$\text{(a)} \quad f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\text{(b)} \quad f(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$$

$$\text{(c)} \quad f(x,y) = e^{x^2\sqrt{x+y}}$$

14. Man überprüfe, ob die Funktion

$$\text{(a)} \quad u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\text{(b)} \quad u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$$

eine Lösung der dreidimensionalen Potentialgleichung $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ ist. je 1

15. Man bestimme die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt P. je 1

$$\text{(a)} \quad f(x,y) = -\sqrt{x^2+y^2}\,,\ P(3,-4,-5)$$

$$\text{(b)} \quad f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}\,,\ P(\sqrt{5},0,2)$$

16. Man bestimme die Richtungsableitung der folgenden Funktion im Punkt P in Richtung des Vektors $\vec{r}$. 1

$$f(x,y) = x\,y^2\,,\ \ P(3,2),\ \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

17. Gegeben ist die Funktion 1

$$f(x,y,z) = x^2\,y\,z^2$$

und die Vektorfunktion

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xyz \\ xy \\ xz^2 \end{pmatrix}$$

Man berechne

$$\text{grad}\, f\,, \quad \text{div}\,\vec{v}\,, \quad \text{rot}\,\vec{v}\,, \quad \text{div}(\text{grad}\, f)$$

Mathematik 2 SS 2020

1. Übungsblatt – Gruppe GEO

1. Man ermittle die Gleichung der Geraden, die die folgende Bedingung erfüllt: **1**

   a) Durch $P(2,3)$, Steigung $k=-1$.
   b) Durch $P(2,1)$ und $Q(5,1)$.
   c) Durch $P(2,3)$ parallel zur Geraden $2x-y=4$.

2. Man fertige eine Skizze des Graphen der durch die folgenden Gleichungen gegebenen Kurven an und bestimme den Charakter des Kurve (Gerade, Parabel, Hyperbel oder Ellipse). Man bestimme charakteristische Punkte und eventuell die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen. **1**

   a) $x+3y=6$
   b) $x^2+y^2+4y=0$
   c) $\dfrac{(x+1)^2}{1^2}+\dfrac{(y-3)^2}{3^2}=1$

3. Wie in Beispiel 2. **1**

   a) $y=x^2+2x+2$
   b) $x=-y^2$
   c) $x=-\sqrt{y}$
   d) $y=-\sqrt{9-x^2}$
   e) $y=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

4. Man bestimme die erste Ableitung der folgenden Funktionen. **1**

$$\text{a)}\quad f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\,,\qquad \text{b)}\quad f(x)=(ax+b)^x$$

5. Man bestimme die folgenden Grenzwerte (falls sie existieren).

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sqrt{x+4}}{\cos(2x)-1}\ \textbf{1}\qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)\ \textbf{1}$$

6. Man diskutiere die folgenden Funktionen (Definitionsbereich, Nullstellen, relative Extrema, Polstellen, Skizze). je **1**

$$\text{a)}\quad f(x)=x^2\,e^x\,,\quad \text{b)}\quad f(x)=x^3-\frac{48}{x}\,,\quad \text{c)}\quad f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

7. Man berechne folgende Integrale je **1**

$$\text{a)}\int\sqrt{x}\ln x\,dx\,,\quad \text{b)}\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx\,,\quad \text{c)}\int\frac{x^2+2x-1}{x^3-x}\,dx\,,\quad \text{d)}\int(\cos x)^3\,dx$$

8. Man berechne folgendes Integral 1

$$\int_3^4 \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$$

9. Man bestimme folgendes uneigentliches Integral, falls es existiert. 1

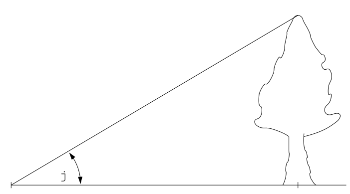
$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

10. Man ermittle den Flächeninhalt des von den folgenden Kurven begrenzten Flächenstücks. Man skizziere den Bereich. 1

$$y = 6x - x^2,\ y = x^2 - 2x$$

11. Der Radius einer Kugel wird mit dem Wert $r = 21$cm gemessen, wobei der Messfehler maximal 0.05cm beträgt. Man ermittle den maximalen Fehler, der bei der Berechnung des Volumens dieser Kugel auf Grund des Messfehlers auftreten kann. 1

12. Die Höhe eines Baumes wird dadurch bestimmt, dass man den Höhenwinkel φ zur Spitze des Baumes von einem Punkt, der $a = 22$m vom Baum entfernt ist, misst.



Man berechne die Höhe des Baumes und den absoluten und den relativen Fehler des berechneten Wertes, wenn der Winkel φ mit $30°$ und einem möglichen Fehler von $1°$ gemessen wird. 1

13. Man bestimme die partiellen Ableitungen f_{xx}, f_{xy} und f_{yy} der folgenden Funktion. je 1

(a) $f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$

(b) $f(x,y) = y\sqrt{x^2-y^2}$

(c) $f(x,y) = \sin\dfrac{x}{\sqrt{y}} + \cos\dfrac{y}{\sqrt{x}}$

14. Man überprüfe, ob die Funktion

$$\text{(a)} \quad u = 1 + xy + \ln\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{(b)} \quad u = e^{kx}\left(\cos(ky) + \sin(ky)\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

eine Lösung der Potentialgleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ist. je 1

15. Man bestimme die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z = f(x, y)$ im Punkt P. je 1

$$\text{(a)} \quad f(x, y) = x^3 + y^3\,, \;\; P(2, -1, 7)$$

$$\text{(b)} \quad f(x, y) = y^2 - x^2 - 4x + 3y + 5\,, \;\; P(0, 0, 5)$$

16. Man bestimme die Richtungsableitung der folgenden Funktion im Punkt P in Richtung des Vektors $\vec{r}$. 1

$$f(x, y) = x\,y^2\,, \;\; P(3, 2), \;\; \vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

17. Gegeben ist die Funktion 1

$$f(x, y, z) = x^2\,y^2\,z$$

und die Vektorfunktion

$$\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xyz \\ -z^2 \\ 2xz^2 \end{pmatrix}$$

Man berechne

$$\operatorname{grad} f\,, \quad \operatorname{div}\vec{v}\,, \quad \operatorname{rot}\vec{v}\,, \quad \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$