Mathematik 2 SS 2020

4. Übungsblatt – Gruppe A

46. Man berechne die folgenden Linienintegrale $\int_{\mathcal{C}} \vec{K}\, d\vec{x}$, über die angegebene Kurve $\mathcal{C}$ je 1

(a) $\vec{K} = \begin{pmatrix} x^2 \\ -xy \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \; 0 \le t \le 1$

(b) $\vec{K} = \begin{pmatrix} y^3 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} \ldots$ Bogen der Parabel $x = 1 - y^2$ von $P(0,-1)$ nach $Q(0,1)$

(c) $\vec{K} = \begin{pmatrix} e^{x-1} \\ xy \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \; 0 \le t \le 1$

47. Man berechne das Linienintegral

$$\int_{\mathcal{C}} xy\, dx + y\, dy$$

wobei $\mathcal{C}$ die Kurve $y = \sin x$ für $0 \le x \le \pi/2$ bezeichnet. 1

48. Man berechne das Linienintegral

$$\int_{\mathcal{C}} z\, dx + x\, dy + y\, dz$$

wobei die geschlossene Kurve $\mathcal{C}$ sich zusammensetzt

- aus dem Kurvenbogen $\vec{x} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 1$, der vom Ursprung zum Punkt $P(1,1,1)$ geht, und
- der Geraden von P zurück zum Ursprung. 2

49. Man berechne das Kurvenintegral je 2

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{K}\, d\vec{x}$$

und skizziere die Kurve $\mathcal{C}$

(a) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x\,y \\ x+y \end{pmatrix}$$

und $\mathcal{C}$: Gerade von $P(1,2)$ nach $Q(3,4)$.

(b) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und $\mathcal{C}$: Parabel $y = 4 - x^2$ von $P(-2,0)$ nach $Q(0,4)$.

(c) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x\,y \\ y \\ -x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \; 0 \le t \le 1$$

(d) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x+y \\ x\,y \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}, \; 0 \le t \le 1$$

50. Die Koordinaten des Schwerpunktes $S(x_s, y_s)$ eines Drahtstücks mit der Gestalt wie die des Kurvenstücks $\mathcal{C}$ und mit der Dichte $\varrho(x,y)$ sind gegeben durch

$$x_s = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} x\,\varrho(x,y)\,ds\,, \quad y_s = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} y\,\varrho(x,y)\,ds$$

wobei

$$m = \int_{\mathcal{C}} \varrho(x,y)\,ds$$

die Gesamtmasse des Drahtstücks bezeichnet.
Man berechne die Koordinaten von S, wenn das Drahtstück die Gestalt des Halbkreises

$$x^2 + y^2 = 1\,, \quad y \le 0$$

besitzt und die Dichte gegeben ist durch $\varrho(x,y) = 1 - y$. **2**

51. Man berechne das Integral

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy$$

für die angegebenen Funktionen $f(x,y)$ und die beschriebenen Bereiche B.
Man fertige eine Skizze des Bereichs B an! je **2**

(a) $f(x,y) = x^2 y$, B ist das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0), (1,0), (0,1)$

(b) $f(x,y) = y\left(1 - \cos\frac{\pi x}{4}\right)$, wobei B begrenzt wird von den Kurven $x = 0, y = \sqrt{x}$ und $y = 2$.

(c) $f(x,y) = e^{x+y^2}\,, \quad B = \{(x,y) \big| \ln y \le x \le \ln 2y,\ 1 \le y \le 2\}$

(d) $f(x,y) = (1-x^3)y^2\,,$ B wird begrenzt von den Kurven $y = x^2$ und $x = y^2$

52. Man berechne das Doppelintegral je **(2)**

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy$$

und skizziere den Bereich B für folgende Angaben

(a) $f(x,y) = x\,y\,, \quad B = \{(x,y) \big| -1 \le x \le 2,\ -x^2 \le y \le 1+x^2\}$

(b) $f(x,y) = 2x\,y^2\,,$ B wird begrenzt von den Kurven $x = y^2\,,\ x = 3-2y^2$

53. Mit Hilfe von Polarkoordinaten berechne man folgendes Integral **(2)**

$$\int_{y=-1}^{1} \int_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$$

Skizzieren Sie den Integrationsbereich.

54. Man berechne das Integral **(2)**

$$\int_{x=0}^{\pi/2} \int_{z=1}^{2} \int_{y=0}^{\sqrt{1-z}} y\cos x\,dy\,dz\,dx$$

55. Man berechne man das Integral

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

für die angegebenen Funktionen $f(x,y,z)$ und die beschriebenen Bereiche B.
Man fertige eine Skizze des Bereichs B an! je **(2)**

(a) $f(x,y,z) = 2x\,,\ B = \{(x,y,z) \mid 0 \le y \le 2, 0 \le x \le \sqrt{4-y^2}, 0 \le z \le y\}$. $(I = 4)$

(b) $f(x,y,z) = y\,,$ B ist der Tetraeder, der von den Flächen $x = 0, y = 0, z = 0$ und $2x+3y+z = 4$ begrenzt wird.

(c) $f(x,y,z) = x\,,$ B wird begrenzt von dem Paraboloid $x = 4y^2+4z^2$ und der Ebene $x = 4$.

(d) $f(x,y,z) = 3x + xz\,,$ B wird begrenzt vom Zylinder $x^2+z^2 = 9$ sowie den Ebenen $y+z = 3$ und $y = 0$. $(I = 0)$

(e) $f(x, y, z) = z$, B liegt im oberen Halbraum und wird begrenzt von dem Drehkegel $9x^2 + z^2 = y^2$ sowie den Ebenen $z = 0$ und $y = 9$. ($I = 729/2$)

56. Man skizziere den von den Flächen **(2)**

$$3x + 2y + z = 6\,,\ x = 0\,,\ y = 0\,,\ z = 0$$

begrenzten räumlichen Bereich und berechne anschließend das Volumen dieses Bereichs.

57. Unter Verwendung von Polarkoordinaten berechne man das Volumen des räumlichen Bereichs, der unterhalb des Kegels $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ und über der Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 4$ liegt. **(2)**

58. Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten berechne man das Integral

$$\iiint_B x\,dV$$

Dabei bezeichnet B den räumlichen Bereich, der eingeschlossen wird von den Ebenen $z = 0$ und $z = x + y + 5$ sowie von den Zylindern $x^2 + y^2 = 4$ und $x^2 + y^2 = 9$. **(2)**

59. Verwende Zylinderkoordinaten zur Berechnung des Integrals **(2)**

$$\iiint_B x\,dV$$

wobei der Bereich B der im ersten Oktanten liegende Teil des Paraboloids $z = x^2 + y^2$ ist, der nach oben von der Ebene $z = 4$ begrenzt wird.

60. Unter Verwendung von Kugelkoordinaten berechne man das Integral

$$\iiint_B (x^2 + y^2 + z^2)^2\,dV$$

Dabei bezeichnet B die Kugel mit dem Mittelpunkt im Ursprung und dem Radius 5. **(2)**

61. Man bestimme die Jacobi-Determinante der Koordinatentransformation **(1)**

$$\begin{aligned} x &= u^2 + w^2 \\ y &= u + 3w \\ z &= u^2 - v^2 + w^2 \end{aligned}$$

Mathematik 2 SS 2020

4. Übungsblatt – Gruppe B

46. Man berechne die folgenden Linienintegrale $\int_{\mathcal{C}} \vec{K}\, d\vec{x}$ über die angegebene Kurve $\mathcal{C}$ je **1**

$$\text{(a)} \quad \vec{K} = \begin{pmatrix} y \\ x^2 + xy \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \; 0 \le t \le 2$$

$$\text{(b)} \quad \vec{K} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} \; \ldots \; \begin{array}{l}\text{positiv orientiertes Dreieck} \\ \text{mit den Eckpunkten} \;\; (0,0), (1,0), (0,1)\end{array}$$

$$\text{(c)} \quad \vec{K} = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ xy \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} t^3 \\ 11t^4 \end{pmatrix}, \; 0 \le t \le 1$$

47. Man berechne das Linienintegral

$$\int_{\mathcal{C}} y\, dx - x\, dy$$

wobei $\mathcal{C}$ den Teil der Parabel $y^2 = x$ bezeichnet, der die Punkte $(1, -1)$ und $(1, 1)$ verbindet. **1**

48. Man berechne das Linienintegral

$$\int_{\mathcal{C}} y\, dx + z\, dy + x\, dz$$

wobei die geschlossene Kurve $\mathcal{C}$ sich zusammensetzt

- aus dem Kurvenbogen $\vec{x} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 1$, der vom Ursprung zum Punkt $P(1, 1, 1)$ geht, und
- der Geraden von P zurück zum Ursprung. **2**

49. Man berechne das Kurvenintegral je **2**

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{K}\, d\vec{x}$$

und skizziere die Kurve $\mathcal{C}$

(a) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x\,y \\ x+y \end{pmatrix}$$

und $\mathcal{C}$: Gerade von $P(1,0)$ nach $Q(2,3)$.

(b) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und $\mathcal{C}$: Parabel $y = x^2 - 4$ von $P(-2,0)$ nach $Q(0,-4)$.

(c) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x\,y \\ y \\ -x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \\ t^3 \end{pmatrix}, \; 0 \le t \le 1$$

(d) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x+y \\ x\,y \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{C} : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^t \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}, \; 0 \le t \le 1$$

50. Die Koordinaten des Schwerpunktes $S(x_s, y_s)$ eines Drahtstücks mit der Gestalt wie die des Kurvenstücks $\mathcal{C}$ und mit der Dichte $\varrho(x,y)$ sind gegeben durch

$$x_s = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} x\,\varrho(x,y)\,ds\,, \quad y_s = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} y\,\varrho(x,y)\,ds$$

wobei

$$m = \int_{\mathcal{C}} \varrho(x,y)\,ds$$

die Gesamtmasse des Drahtstücks bezeichnet.
Man berechne die Koordinaten von S, wenn das Drahtstück die Gestalt des Halbkreises

$$x^2 + y^2 = 1\,, \quad y \le 0$$

besitzt und die Dichte gegeben ist durch $\varrho(x,y) = 1 - y$. **2**

51. Man berechne das Integral

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy$$

für die angegebenen Funktionen $f(x,y)$ und die beschriebenen Bereiche B.
Man fertige eine Skizze des Bereichs B an! je **2**

(a) $f(x,y) = x \sin y - y e^x$, dabei ist B das Rechteck $B = [-1,1] \times [0, \pi/2]$

(b) $f(x,y) = x + 2y$, wobei B begrenzt wird von den Parabeln $y = 2x^2$ und $y = 1 + x^2$.

(c) $f(x,y) = y\sqrt{x}\,, \quad B = \{(x,y)\big|0 \le x \le y^2,\ 0 \le y \le 1\}$

(d) $f(x,y) = 1\,, \quad B$ liegt im ersten Quadranten und wird begrenzt von den Kurven $y = 2x - 4$ und $8y = 16 + x^2$.

52. Man berechne das Doppelintegral je **(2)**

$$\iint_B f(x,y)\; dx\, dy$$

und skizziere den Bereich B für folgende Angaben

(a) $f(x,y) = x + 2y\,, \quad B = \{(x,y)\big|\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$

(b) $f(x,y) = \sin(x) - y\,, \quad B$ wird begrenzt von den Kurven $y = \cos x\,,\ y = 0\,,\ x = 0\,,\ x = \pi/2$

53. Mit Hilfe von Polarkoordinaten berechne man folgendes Integral **(2)**

$$\int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{\sqrt{1-y^2}} \cos(x^2 + y^2)\; dx\, dy$$

Skizzieren Sie den Integrationsbereich.

54. Man berechne das Integral **(2)**

$$\int_{y=-1}^{1} \int_{z=0}^{2} \int_{x=0}^{\sqrt{4-z^2}} y^2 z\; dx\, dz\, dy$$

55. Man berechne man das Integral

$$\iiint_B f(x,y,z)\; dx\, dy\, dz$$

für die angegebenen Funktionen $f(x,y,z)$ und die beschriebenen Bereiche B. Man fertige eine Skizze des Bereichs B an! je **(2)**

(a) $f(x,y,z) = 4y\,,\ B$ liegt im ersten Oktanten und wird von den Ebenen $z = \dfrac{y}{2}, x = 0,\ x = 3, y = 0, y = 4$ und $z = 0$ eingeschlossen. $(I = 128)$

(b) $f(x,y,z) = z\,,\ B$ ist der Tetraeder, der von den Flächen $x = 0, y = 0, z = 0$ und $x + y + z = 1$ begrenzt wird.

(c) $f(x,y,z) = z\,,\ B$ liegt im ersten Oktanten und wird begrenzt von dem Zylinder $y^2 + z^2 = 9$ sowie den Ebenen $x = 0, y = 3x$ und $z = 0$.

(d) $f(x,y,z) = x^2\, e^y\,,\ B$ wird begrenzt vom parabolischen Zylinder $z = 1 - y^2$ und den Ebenen $z = 0, x = 1$ und $x = -1$. $(I = 8/(3e))$

(e) $f(x,y,z) = z$, B liegt im oberen Halbraum und wird begrenzt von dem Drehkegel $9x^2 + z^2 = y^2$ und den Ebenen $z = 0$ und $y = -9$. ($I = 729/2$)

56. Man skizziere den von den Flächen **(2)**

$$y = 2z\,,\ y = x^2\,,\ y = 4\,,\ z = 0$$

begrenzten räumlichen Bereich und berechne anschließend das Volumen dieses Bereichs.

57. Unter Verwendung von Polarkoordinaten berechne man das Volumen des räumlichen Bereichs, der innerhalb der Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ und außerhalb des Zylinders $x^2 + y^2 = 4$ liegt. **(2)**

58. Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten berechne man das Integral

$$\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2}\, dV$$

Dabei bezeichnet B den räumlichen Bereich, der innerhalb des Zylinders $x^2+y^2 = 16$ zwischen den Ebenen $z = -5$ und $z = 4$ liegt. **(2)**

59. Verwende Zylinderkoordinaten zur Berechnung des Integrals **(2)**

$$\iiint_B (x^2 + y^2)\; dV$$

wobei der Bereich B begrenzt wird durch den Zylinder $x^2 + y^2 = 1$ und die Ebenen $z = 1$ und $z = 3$.

60. Unter Verwendung von Kugelkoordinaten berechne man das Integral

$$\iiint_B (9 - x^2 - y^2)\, dV$$

Dabei bezeichnet B die Halbkugel $x^2 + y^2 + z^2 \le 9, z \ge 0$. **(2)**

61. Man bestimme die Jacobi-Determinante der Koordinatentransformation **(1)**

$$\begin{aligned} x &= u + v - w \\ y &= -u + v + w \\ z &= 2u - 2v + 3w \end{aligned}$$

Mathematik 2 SS 2020

4. Übungsblatt – Gruppe C

46. Man berechne die folgenden Linienintegrale $\int_{\mathcal{C}} \vec{K}\,d\vec{x}$, über die angegebene Kurve $\mathcal{C}$ je 1

$$\text{(a)}\quad \vec{K} = \begin{pmatrix} xy \\ 2y^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 11t^4 \\ t^3 \end{pmatrix},\ 0 \le t \le 1$$

$$\text{(b)}\quad \vec{K} = \begin{pmatrix} x \\ xy \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}\ \ldots\ \text{Bogen der Parabel } y = x^2 \text{ von } P(0,0) \text{ nach } Q(1,1)$$

$$\text{(c)}\quad \vec{K} = \begin{pmatrix} 3+2xy \\ x^2-3y^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix},\ 0 \le t \le 2\pi$$

47. Man berechne das Linienintegral

$$\int_{\mathcal{C}} xy\,dx + y\,dy$$

wobei $\mathcal{C}$ die Kurve $y = \sin x$ für $0 \le x \le \pi/2$ bezeichnet. 1

48. Man berechne das Linienintegral

$$\int_{\mathcal{C}} y\,dx + z\,dy + x\,dz$$

wobei $\mathcal{C}$ die Strecke von (2,0,0) nach (3,4,5) und dann von (3,4,5) nach (3,4,0) bezeichnet. 2

49. Man berechne das Kurvenintegral je 2

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{K}\,d\vec{x}$$

und skizziere die Kurve $\mathcal{C}$

(a) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x\,y \\ x+y \end{pmatrix}$$

und $\mathcal{C}$: Gerade von $P(0,-1)$ nach $Q(4,3)$.

(b) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und $\mathcal{C}$: Parabel $x = 4 - y^2$ von $P(0,2)$ nach $Q(4,0)$.

(c) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x\,y \\ y \\ -x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}, \; 0 \le t \le 1$$

(d) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x + y \\ x\,y \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{2t} \\ e^{t} \end{pmatrix}, \; 0 \le t \le 1$$

50. Die Koordinaten des Schwerpunktes $S(x_s, y_s)$ eines Drahtstücks mit der Gestalt wie die des Kurvenstücks $\mathcal{C}$ und mit der Dichte $\varrho(x,y)$ sind gegeben durch

$$x_s = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} x\,\varrho(x,y)\,ds\,, \quad y_s = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} y\,\varrho(x,y)\,ds$$

wobei

$$m = \int_{\mathcal{C}} \varrho(x,y)\,ds$$

die Gesamtmasse des Drahtstücks bezeichnet.
Man berechne die Koordinaten von S, wenn das Drahtstück die Gestalt des Halbkreises

$$x^2 + y^2 = 4\,, \quad x \ge 0$$

besitzt und die Dichte gegeben ist durch $\varrho(x,y) = 1$. **2**

51. Man berechne das Integral

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy$$

für die angegebenen Funktionen $f(x,y)$ und die beschriebenen Bereiche B.
Man fertige eine Skizze des Bereichs B an! je **2**

(a) $f(x,y) = x^2 y$, B ist das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,1), (0,-1), (1,0)$

(b) $f(x,y) = x \cos y$, wobei B begrenzt wird von den Geraden $y = 0$ und $x = 1$ sowie der Parabel $y = x^2$.

(c) $f(x,y) = x^2$, wobei B von den Kurven $xy = 16, y = x, y = 0$ und $x = 8$ begrenzt wird.

(d) $f(x,y) = x^2 + 2xy^2 + 2$, B liegt im ersten Quadranten und wird begrenzt von den Kurven $y = 2 - x^2 + x$, $x = 0$ und $y = 0$.

52. Man berechne das Doppelintegral je (2)

$$\iint_B f(x,y)\, dx\, dy$$

und skizziere den Bereich B für folgende Angaben

(a) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2}\,, \quad B = \{(x,y)\big|\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x\}$

(b) $f(x,y) = x^2 + y\,, \quad B$ wird begrenzt von den Kurven $y = x^2 + 2\,,\ y = 0\,,\ x = 0\,,\ x = 1$

53. Mit Hilfe von Polarkoordinaten berechne man folgendes Integral (2)

$$\int_{x=-2}^{2} \int_{y=0}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dy\, dx$$

Skizzieren Sie den Integrationsbereich.

54. Man berechne das Integral (2)

$$\int_{y=-1}^{1} \int_{z=0}^{2} \int_{x=0}^{\sqrt{4-z^2}} y^2 z\, dx\, dz\, dy$$

55. Man berechne man das Integral

$$\iiint_B f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

für die angegebenen Funktionen $f(x,y,z)$ und die beschriebenen Bereiche B. Man fertige eine Skizze des Bereichs B an! je (2)

(a) $f(x,y,z) = 6xy\,,\ B$ liegt unter der Ebene $z = 1 + x + y$ und über dem Bereich B' der $xy-$Ebene, der begrenzt wird von den Kurven $y = \sqrt{x}, y = 0$ und $x = 1$. $(I = 65/28)$

(b) $f(x,y,z) = z\,,\ B$ ist der Tetraeder, der von den Flächen $x = 0, y = 0, z = 0$ und $x + y + z = 1$ begrenzt wird.

(c) $f(x,y,z) = x\,,\ B$ wird begrenzt von dem Paraboloid $x = 4y^2 + 4z^2$ und der Ebene $x = 4$.

(d) $f(x,y,z) = 1\,,\ B$ wird begrenzt von den Paraboloiden $x = y^2 + z^2$ und $x = 2 - y^2 - z^2$. $(I = \pi)$

(e) $f(x,y,z) = z\,,\ B$ liegt im oberen Halbraum und wird begrenzt von dem Drehkegel $9x^2 + z^2 = y^2$ und den Ebenen $z = 0$ und $y = -9$. $(I = 729/2)$

56. Man skizziere den von den Flächen **(2)**

$$x = 4 - y^2\,,\ x + z = 4,\,,\ x = 0\,,\ z = 0$$

begrenzten räumlichen Bereich und berechne anschließend das Volumen dieses Bereichs.

57. Unter Verwendung von Polarkoordinaten berechne man das Volumen des räumlichen Bereichs, der unterhalb des Kegels $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ und über der Kreisscheibe $x^2 + y^2 \leq 4$ liegt. **(2)**

58. Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten berechne man das Integral

$$\iiint_B \sqrt{x^2 + y^2}\, dV$$

Dabei bezeichnet B den räumlichen Bereich, der innerhalb des Zylinders $x^2 + y^2 = 16$ zwischen den Ebenen $z = -5$ und $z = 4$ liegt. **(2)**

59. Verwende Zylinderkoordinaten zur Berechnung des Integrals **(2)**

$$\iiint_B e^{x^2+y^2}\, dV$$

wobei der Bereich B begrenzt wird durch den Zylinder $x^2 + y^2 = 4$ und die Ebenen $z = 0$ und $z = 4$.

60. Unter Verwendung von Kugelkoordinaten berechne man das Integral

$$\iiint_B z\, dV$$

Dabei bezeichnet B den räumlichen Bereich im ersten Oktanten, der zwischen den Sphären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ liegt. **(2)**

61. Man bestimme die Jacobi-Determinante der Koordinatentransformation **(1)**

$$\begin{aligned} x &= u + v + w \\ y &= u - v + w \\ z &= u - 2v + 3w \end{aligned}$$

Mathematik 2 SS 2020

4. Übungsblatt – Gruppe D

46. Man berechne die folgenden Linienintegrale $\int_\mathcal{C} \vec{K}\, d\vec{x}$ über die angegebene Kurve $\mathcal{C}$ je **(1)**

(a) $\vec{K} = \begin{pmatrix} y \\ x^2 + xy \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix},\ 0 \le t \le 2$

(b) $\vec{K} = \begin{pmatrix} y^3 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} \ldots$ Bogen der Parabel $x = 1 - y^2$ von $P(0,-1)$ nach $Q(0,1)$

(c) $\vec{K} = \begin{pmatrix} 3 + 2xy \\ x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix},\ 0 \le t \le 2\pi$

47. Man berechne das Linienintegral

$$\int_\mathcal{C} x\, dy - y\, dx$$

wobei $\mathcal{C}$ den Halbkreisbogen von $(0,-1)$ über $(1,0)$ nach $(0,1)$ bezeichnet. **(1)**

48. Man berechne das Linienintegral

$$\int_\mathcal{C} (x + yz)\, dx + 2x\, dy + xyz\, dz$$

wobei $\mathcal{C}$ die Strecke von (1,0,1) nach (2,3,1) und dann von (2,3,1) nach (2,5,2) bezeichnet. **(2)**

49. Man berechne das Kurvenintegral je **(2)**

$$\int_\mathcal{C} \vec{K}\, d\vec{x}$$

und skizziere die Kurve $\mathcal{C}$

(a) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x\, y \\ x + y \end{pmatrix}$$

und $\mathcal{C}$: Gerade von $P(1,1)$ nach $Q(3,2)$.

(b) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und $\mathcal{C}$: Parabel $x = y^2 - 4$ von $P(-4, 0)$ nach $Q(0, -2)$.

(c) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x\,y \\ y \\ -x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \end{pmatrix}, \; 0 \le t \le 1$$

(d) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x + y \\ x\,y \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{-t} \\ e^t \end{pmatrix}, \; 0 \le t \le 1$$

50. Die Koordinaten des Schwerpunktes $S(x_s, y_s)$ eines Drahtstücks mit der Gestalt wie die des Kurvenstücks $\mathcal{C}$ und mit der Dichte $\varrho(x, y)$ sind gegeben durch

$$x_s = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} x\, \varrho(x, y)\, ds, \quad y_s = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} y\, \varrho(x, y)\, ds$$

wobei

$$m = \int_{\mathcal{C}} \varrho(x, y)\, ds$$

die Gesamtmasse des Drahtstücks bezeichnet.
Man berechne die Koordinaten von S, wenn das Drahtstück die Gestalt des Halbkreises

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y \ge 0$$

besitzt und die Dichte gegeben ist durch $\varrho(x, y) = 1 - y$. **2**

51. Man berechne das Integral

$$\iint_B f(x, y)\, dx\, dy$$

für die angegebenen Funktionen $f(x, y)$ und die beschriebenen Bereiche B.
Man fertige eine Skizze des Bereichs B an! je **2**

(a) $f(x, y) = x \sin y - y e^x$, dabei ist B das Rechteck $B = [-1, 1] \times [0, \pi/2]$

(b) $f(x, y) = y\left(1 - \cos \frac{\pi x}{4}\right)$, wobei B begrenzt wird von den Kurven $x = 0, y = \sqrt{x}$ und $y = 2$.

(c) $f(x, y) = x^2$, wobei B von den Kurven $xy = 16, y = x, y = 0$ und $x = 8$ begrenzt wird.

(d) $f(x, y) = 1$, B liegt im ersten Quadranten und wird begrenzt von den Kurven $y = 2x - 4$ und $8y = 16 + x^2$.

52. Man berechne das Doppelintegral je **2**

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy$$

und skizziere den Bereich B für folgende Angaben

(a) $f(x,y) = x^3 + 2y\,, \quad B = \{(x,y) \big|\, 0 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 2x\}$

(b) $f(x,y) = 4x^3\,, \quad B$ wird begrenzt von den Kurven
$y = (x-1)^2\,,\ y = 3 - x$

53. Mit Hilfe von Polarkoordinaten berechne man folgendes Integral **2**

$$\int_{x=0}^{3} \int_{y=0}^{\sqrt{9-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\,dy\,dx$$

Skizzieren Sie den Integrationsbereich.

54. Man berechne das Integral **2**

$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x} \int_{z=0}^{x+y} x\,dz\,dy\,dx$$

55. Man berechne man das Integral

$$\iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

für die angegebenen Funktionen $f(x,y,z)$ und die beschriebenen Bereiche B.
Man fertige eine Skizze des Bereichs B an! je **2**

(a) $f(x,y,z) = 6xy\,,\ B$ liegt unter der Ebene $z = 1 + x + y$ und über dem Bereich B' der $xy-$Ebene, der begrenzt wird von den Kurven $y = \sqrt{x}, y = 0$ und $x = 1$. $(I = 65/28)$

(b) $f(x,y,z) = 1\,,\ B$ ist der Tetraeder, der von den Flächen $x = 0, z = 0, x = 2y$ und $x + 2y + z = 2$ begrenzt wird.

(c) $f(x,y,z) = 1\,,\ B$ wird begrenzt vom Zylinder $x = y^2$ sowie den Ebenen $z = 0$ und $x + z = 1\,.$

(d) $f(x,y,z) = 1\,,\ B$ wird begrenzt von den Paraboloiden $x = y^2 + z^2$ und $x = 2 - y^2 - z^2$. $(I = \pi)$

(e) $f(x,y,z) = z\,,\ B$ liegt im oberen Halbraum und wird begrenzt von dem Drehkegel $9y^2 + z^2 = x^2$ und den Ebenen $z = 0$ und $x = 9\,.$ $(I = 729/2)$

56. Man skizziere den von den Flächen **2**

$$z = 1 - x^2\,,\ y = x\,,\ y = 2 - x\,,\ z = 0$$

begrenzten räumlichen Bereich und berechne anschließend das Volumen dieses Bereichs.

57. Unter Verwendung von Polarkoordinaten berechne man das Volumen des räumlichen Bereichs, der unterhalb des Paraboloids $z = 18 - 2x^2 - 2y^2$ und über der xy-Ebene liegt. **2**

58. Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten berechne man das Integral

$$\iiint_B (x^3 + xy^2)\, dV$$

Dabei bezeichnet B den räumlichen Bereich im ersten Oktanten, der unter dem Paraboloid $z = 1 - x^2 - y^2$ liegt. **2**

59. Verwende Zylinderkoordinaten zur Berechnung des Integrals **2**

$$\iiint_B y\ dV$$

wobei der Bereich B der im ersten Oktanten liegende Teil des Paraboloids $z = 4 - x^2 - y^2$ ist.

60. Unter Verwendung von Kugelkoordinaten berechne man das Integral

$$\iiint_B z\, dV$$

Dabei bezeichnet B den räumlichen Bereich im ersten Oktanten, der zwischen den Sphären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ liegt. **2**

61. Man bestimme die Jacobi-Determinante der Koordinatentransformation **1**

$$\begin{aligned} x &= 2u + w \\ y &= u^2 - v^2 \\ z &= u^2 + v^2 - 2w^2 \end{aligned}$$

Mathematik 2 SS 2020

4. Übungsblatt – Gruppe GEO

46. Man berechne die folgenden Linienintegrale $\int_{\mathcal{C}} \vec{K}\, d\vec{x}$, über die angegebene Kurve $\mathcal{C}$ je 1

$$\text{(a)} \quad \vec{K} = \begin{pmatrix} x^2 \\ -xy \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix},\ 0 \le t \le 1$$

$$\text{(b)} \quad \vec{K} = \begin{pmatrix} y^3 \\ x^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} \ \ldots \ \text{Bogen der Parabel } x = 1 - y^2 \text{ von } P(0,-1) \text{ nach } Q(0,1)$$

$$\text{(c)} \quad \vec{K} = \begin{pmatrix} e^{x-1} \\ xy \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix},\ 0 \le t \le 1$$

47. Man berechne das Linienintegral

$$\int_{\mathcal{C}} y\, dx - x\, dy$$

wobei $\mathcal{C}$ den Teil der Parabel $y^2 = x$ bezeichnet, der die Punkte $(1,-1)$ und $(1,1)$ verbindet. 1

48. Man berechne das Linienintegral

$$\int_{\mathcal{C}} y\, dx + z\, dy + x\, dz$$

wobei $\mathcal{C}$ die Strecke von (2,0,0) nach (3,4,5) und dann von (3,4,5) nach (3,4,0) bezeichnet. 2

49. Man berechne das Kurvenintegral je 2

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{K}\, d\vec{x}$$

und skizziere die Kurve $\mathcal{C}$

(a) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x\,y \\ x + y \end{pmatrix}$$

und $\mathcal{C}$: Gerade von $P(1,1)$ nach $Q(3,2)$.

(b) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

und $\mathcal{C}$: Parabel $x = y^2 - 4$ von $P(-4, 0)$ nach $Q(0, -2)$.

(c) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x\,y \\ y \\ -x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \end{pmatrix}, \ 0 \le t \le 1$$

(d) wobei

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} x+y \\ x\,y \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{-t} \\ e^{t} \end{pmatrix}, \ 0 \le t \le 1$$

50. Die Koordinaten des Schwerpunktes $S(x_s, y_s)$ eines Drahtstücks mit der Gestalt wie die des Kurvenstücks $\mathcal{C}$ und mit der Dichte $\varrho(x, y)$ sind gegeben durch

$$x_s = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} x\,\varrho(x, y)\,ds, \quad y_s = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} y\,\varrho(x, y)\,ds$$

wobei

$$m = \int_{\mathcal{C}} \varrho(x, y)\,ds$$

die Gesamtmasse des Drahtstücks bezeichnet.
Man berechne die Koordinaten von S, wenn das Drahtstück die Gestalt des Halbkreises

$$x^2 + y^2 = 1, \quad y \le 0$$

besitzt und die Dichte gegeben ist durch $\varrho(x, y) = 1 - y$. **2**

51. Man berechne das Integral

$$\iint_B f(x, y)\,dx\,dy$$

für die angegebenen Funktionen $f(x, y)$ und die beschriebenen Bereiche B.
Man fertige eine Skizze des Bereichs B an! je **2**

(a) $f(x, y) = x \sin y - y e^x$, dabei ist B das Rechteck $B = [-1, 1] \times [0, \pi/2]$

(b) $f(x, y) = x + 2y$, wobei B begrenzt wird von den Parabeln $y = 2x^2$ und $y = 1 + x^2$.

(c) $f(x, y) = y\sqrt{x}$, $\quad B = \{(x, y) | 0 \le x \le y^2,\ 0 \le y \le 1\}$

(d) $f(x, y) = 1$, $\quad B$ liegt im ersten Quadranten und wird begrenzt von den Kurven $y = 2x - 4$ und $8y = 16 + x^2$.

52. Man berechne das Doppelintegral je **2**

$$\iint_B f(x,y)\;dx\,dy$$

und skizziere den Bereich B für folgende Angaben

(a) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2}\,, \quad B = \{(x,y)\big|\; 0 \le x \le 1,\; 0 \le y \le x\}$

(b) $f(x,y) = x^2 + y\,, \quad B$ wird begrenzt von den Kurven $y = x^2+2\,,\; y = 0\,,\; x = 0\,,\; x = 1$

53. Mit Hilfe von Polarkoordinaten berechne man folgendes Integral **2**

$$\int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{\sqrt{9-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\;dy\,dx$$

Skizzieren Sie den Integrationsbereich.

54. Man berechne das Integral **2**

$$\int_{x=0}^{\pi/2}\int_{z=1}^{2}\int_{y=0}^{\sqrt{1-z}} y\cos x\;dy\,dz\,dx$$

55. Man berechne man das Integral

$$\iiint_B f(x,y,z)\;dx\,dy\,dz$$

für die angegebenen Funktionen $f(x,y,z)$ und die beschriebenen Bereiche B. Man fertige eine Skizze des Bereichs B an! je **2**

(a) $f(x,y,z) = 4y\,,\; B$ liegt im ersten Oktanten und wird von den Ebenen $z = \dfrac{y}{2}, x = 0,\; x = 3, y = 0, y = 4$ und $z = 0$ eingeschlossen. $(I = 128)$

(b) $f(x,y,z) = z\,,\; B$ ist der Tetraeder, der von den Flächen $x = 0, y = 0, z = 0$ und $x + y + z = 1$ begrenzt wird.

(c) $f(x,y,z) = z\,,\; B$ liegt im ersten Oktanten und wird begrenzt von dem Zylinder $y^2 + z^2 = 9$ sowie den Ebenen $x = 0, y = 3x$ und $z = 0\,.$

(d) $f(x,y,z) = x^2\,e^y\,,\; B$ wird begrenzt vom parabolischen Zylinder $z = 1 - y^2$ und den Ebenen $z = 0, x = 1$ und $x = -1$. $(I = 8/(3e))$

(e) $f(x,y,z) = z\,,\; B$ liegt im oberen Halbraum und wird begrenzt von dem Drehkegel $9x^2 + z^2 = y^2$ und den Ebenen $z = 0$ und $y = -9\,.$ $(I = 729/2)$

56. Man skizziere den von den Flächen **2**

$$x = 4 - y^2\,,\ x + z = 4,\,,\ x = 0\,,\ z = 0$$

begrenzten räumlichen Bereich und berechne anschließend das Volumen dieses Bereichs.

57. Unter Verwendung von Polarkoordinaten berechne man das Volumen des räumlichen Bereichs, der unterhalb des Paraboloids $z = 18 - 2x^2 - 2y^2$ und über der xy-Ebene liegt. **2**

58. Unter Verwendung von Zylinderkoordinaten berechne man das Integral

$$\iiint_B x\,dV$$

Dabei bezeichnet B den räumlichen Bereich, der eingeschlossen wird von den Ebenen $z = 0$ und $z = x + y + 5$ sowie von den Zylindern $x^2 + y^2 = 4$ und $x^2 + y^2 = 9$. **2**

59. Verwende Zylinderkoordinaten zur Berechnung des Integrals **2**

$$\iiint_B (x^2 + y^2)\,dV$$

wobei der Bereich B begrenzt wird durch den Zylinder $x^2 + y^2 = 1$ und die Ebenen $z = 1$ und $z = 3$.

60. Unter Verwendung von Kugelkoordinaten berechne man das Integral

$$\iiint_B z\,dV$$

Dabei bezeichnet B den räumlichen Bereich im ersten Oktanten, der zwischen den Sphären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ liegt. **2**

61. Man bestimme die Jacobi-Determinante der Koordinatentransformation **1**

$$\begin{aligned} x &= 2u + w \\ y &= u^2 - v^2 \\ z &= u^2 + v^2 - 2w^2 \end{aligned}$$