Tutorium 30.04.2020

1. **Beispiel 60 b), 61 b)**

   Man untersuche die Funktion $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0,) = 0$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

   An allen Stellen $(x,y) \neq (0,0)$ ist $f(x,y)$ der Quotient von zwei differenzierbaren Funktionen (wo der Nenner ungleich Null ist). Daher ist die Funktion stetig und differenzierbar an diesen Stellen.

   Zu untersuchen verbleibt die Stelle $(0,0)$.

   Mit $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = 0$ gilt $(x_n, y_n) \to (0,0)$ und $f(x_n, y_n) = 0 \to 0$.

   Mit $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$ gilt ebenfalls $(x_n, y_n) \to (0,0)$, aber

   $f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0$

   Folglich ist $f(x,y)$ **nicht** stetig in $(0,0)$ und kann daher auch nicht differenzierbar an dieser Stelle sein.

   Wir beobachten allerdings, dass beide partielle Ableitungen an der Stelle $(0,0)$ existieren!

   $f_x|_{(0,0)} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = 0$ und

   $f_y|_{(0,0)} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = 0$

2. **Beispiel 63)**

   Betrachte $z = z(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$.

   Die Funktion ist definiert, falls $x \neq 0$. In diesem Fall sogar differenzierbar und damit stetig.

Wir untersuchen nun, ob wir die Funktion an der Stelle $(0,0)$ stetig ergänzen können.

Mit $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = 0$ gilt $(x_n, y_n) \to 0$ und

$z(x_n, y_n) = \arctan 0 \to \arctan 0 = 0$

Mit $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$ gilt $(x_n, y_n) \to 0$ und

$z(x_n, y_n) = \arctan 1 \to \arctan 1 \neq 0$

Also ist **keine** stetige Ergänzung möglich!

Die partiellen Ableitungen sind

$z_x = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot -\frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $z_y = \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$

$z_{xx} = -\frac{0\cdot(x^2+y^2)-y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

3. **Beispiel 66)**

Die Funktion $y = y(x)$ ist implizit gegeben durch

$e^{x-y} + x^2 - y = 1$. Man berechne $\frac{dy}{dy}(0)$.

$F(x,y) = 0$ mit $F(x,y) = e^{x-y} + x^2 - y - 1$.

Laut Vorlesung gilt für die Auflösung nach y , dass

$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{e^{x-y}+2x}{-e^{x-y}-1}$.

Für $x = 0$ gilt $e^{-y} - y = 1$ bzw. $e^{-y} = 1 + y \Rightarrow y = 0$ weil die Funktion $e^{-y} - 1 - y$ streng monoton fällt. Also $y(0) = 0$.

Also ist $y'(0) = -\frac{1}{-1-1} = \frac{1}{2}$.

Bemerkung. Differenzieren wir die gegebene Gleichung nach x , dann erhalten wir

$e^{x-y}(1 - y') + 2x - y' = 0$.

Für $x = 0$ (und $y = 0$ von vorher) ergibt sich

$1 - y'(0) + 0 - y'(0) = 0 \;\Rightarrow\; y'(0) = \frac{1}{2}$.

4. **Beispiel 72)**

   Sei $z = \arctan \frac{x}{y}$ mit $x = u + v$ und $y = u - v$.

   Dann ist $z_u = z_x \cdot x_u + z_y \cdot y_u$, $z_v = z_x \cdot x_v + z_y \cdot y_v$

   $z_x = \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2}$, $z_y = \frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2} \cdot -\frac{x}{y^2} = -\frac{x}{x^2+y^2}$

   Weiters $x_u = 1$, $x_v = 1$, $y_u = 1$, $y_v = -1$.

   $z_u + z_v = (\frac{y}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2}) + (\frac{y}{x^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2}) = \frac{2y}{x^2+y^2}$

   Wegen $x^2 + y^2 = (u+v)^2 + (u-v)^2 = 2(u^2 + v^2)$

   ist $z_u + z_v = \frac{2(u-v)}{2(u^2+v^2)} = \frac{u-v}{u^2+v^2}$.

5. **Beispiel 76 a)**

   Man führe $w = x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x}$ in Polarkoordinaten über.

   $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ bzw. $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$

   $z_x = z_r \cdot r_x + z_\varphi \cdot \varphi_x$, $z_y = z_r \cdot r_y + z_\varphi \cdot \varphi_y$

   Weiters ist $r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r}$, $r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{r}$.

   Von Beispiel 63) wissen wir, dass

   $\varphi_x = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $\varphi_y = \frac{x}{x^2+y^2}$. Damit ist

   $w = x(z_r \cdot \frac{y}{r} + z_\varphi \cdot \frac{x}{x^2+y^2}) - y(z_r \cdot \frac{x}{r} + z_\varphi \cdot -\frac{y}{x^2+y^2}) =$

   $= \frac{xy}{r} z_r + \frac{x^2}{x^2+y^2} z_\varphi - \frac{xy}{r} z_r + \frac{y^2}{x^2+y^2} z_\varphi = z_\varphi$