Tutorium 15.05.2020

1. **Beispiel 79 d)**

   Man bestimme die Richtungsableitung von $f(x,y,z) = x^3yz^2 + e^{2x}$ im Punkt $P(0,0,0)$ in Richtung des Vektors $(2,1,-2)$.

   Allgemein gilt (in allen Dimensionen): die Richtungsableitung einer Funktion f in einem Punkt P in Richtung eines Vektors $\vec{a}$ ist das Skalarprodukt $\mathrm{grad} f|_P \cdot \vec{a}_0$ wobei $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$.

   Im vorliegenden Beispiel

   $$\mathrm{grad} f = \begin{pmatrix} 3x^2yz^2 + 2e^{2x} \\ x^3z^2 \\ 2x^3yz \end{pmatrix} \quad , \quad \mathrm{grad} f|_P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   $$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_0 = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   Also $\quad \mathrm{grad} f|_P \cdot \vec{a}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{4}{3}$.

   Bemerkung. Die Richtung der maximalen Änderung einer Funktion f in einem Punkt P ist durch $\vec{a} = \mathrm{grad} f|_P$ gegeben.

2. **Beispiel 81)**

   Man bestimme $\mathrm{div}\,\vec{v}$ für $\vec{v} = \frac{1}{|\vec{r}|^n}\vec{r}$ mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}}} \\ \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}}} \\ \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}}} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}} - x \cdot \frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1} \cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^n} = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}} - nx^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}}{(x^2+y^2+z^2)^n}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}} - y \cdot \frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1} \cdot 2y}{(x^2+y^2+z^2)^n} = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}} - ny^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}}{(x^2+y^2+z^2)^n}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial z} = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}} - z \cdot \frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1} \cdot 2z}{(x^2+y^2+z^2)^n} = \frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}} - nz^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}}{(x^2+y^2+z^2)^n}$$

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} =$$

$$= \frac{3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}} - n(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}}{(x^2+y^2+z^2)^n} =$$

$$= \frac{(3-n)(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}}}{(x^2+y^2+z^2)^n} = \frac{3-n}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}}}$$

3. **Beispiel 86 b)**

Man entwickle die Funktion $f(x,y) = e^x \cos y$ in eine Taylorreihe um den Entwicklungspunkt $(0,0)$.

In diesem speziellen Fall können wir die bekannten Taylorreihen für e^x und $\cos y$ verwenden.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots$$

$$f(x,y) = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots)(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots) =$$

$$= 1 + x + (\frac{x^2}{2!} - \frac{y^2}{2!}) + (\frac{x^3}{3!} - \frac{xy^2}{2!}) + \ldots$$

4. **Beispiel 87 a)**

Man bestimme das Taylorpolynom 3. Ordnung von der Funktion $f(x,y) = \ln(x-y)$ im Entwicklungspunkt $P(0,-1)$.

Die allgemeine Formel für das Taylorpolynom 3. Ordnung einer Funktion $f(x,y)$ mit Entwicklungspunkt $P(x_0,y_0)$ lautet

$$f(x_0,y_0) + [f_x|_P \cdot (x-x_0) + f_y|_P \cdot (y-y_0)]+$$

$$+\tfrac{1}{2!}[f_{xx}|_P \cdot (x-x_0)^2 + 2f_{xy}|_P \cdot (x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}|_P \cdot (y-y_0)^2]+$$

$$+\tfrac{1}{3!}[f_{xxx}|_P \cdot (x-x_0)^3 + 3f_{xxy}|_P \cdot (x-x_0)^2(y-y_0) + 3f_{xyy}|_P \cdot (x-x_0)(y-y_0)^2 + f_{yyy}|_P \cdot (y-y_0)^3]$$

$$f(0,-1) = \ln 1 = 0$$

$$f_x = \tfrac{1}{x-y} \quad , \quad f_y = -\tfrac{1}{x-y} \quad \Rightarrow \quad f_x|_P = 1 \quad , \quad f_y|_P = -1$$

$$f_{xx} = -\tfrac{1}{(x-y)^2} \quad , \quad f_{xy} = \tfrac{1}{(x-y)^2} \quad , \quad f_{yy} = -\tfrac{1}{(x-y)^2}$$

$$\Rightarrow \quad f_{xx}|_P = -1 \quad , \quad f_{xy}|_P = 1 \quad , \quad f_{yy}|_P = -1$$

$$f_{xxx} = \tfrac{2}{(x-y)^3} \quad , \quad f_{xxy} = -\tfrac{2}{(x-y)^3} \quad , \quad f_{xyy} = \tfrac{2}{(x-y)^3} \quad , \quad f_{yyy} = -\tfrac{2}{(x-y)^3}$$

$$\Rightarrow \quad f_{xxx}|_P = 2 \quad , \quad f_{xxy}|_P = -2 \quad , \quad f_{xyy}|_P = 2 \quad , \quad f_{yyy}|_P = -2$$

Das Taylorpolynom 3. Ordnung lautet damit

$$x - (y+1) + \tfrac{1}{2}(-x^2 + 2x(y+1) - (y+1)^2)+$$

$$+\tfrac{1}{6}(2x^3 - 6x^2(y+1) + 6x(y+1)^2 - 2(y+1)^3)$$