Tutorium 29.05.2020

1. **Bemerkung.**

   Sei $f(x, y)$ gegeben. Wir wollen die relativen und absoluten Extrema der Funktion bestimmen.

   Eine **notwendige** Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extremums im Punkt $P(x_0, y_0)$ ist $f_x|_P = 0$ und $f_y|_P = 0$.

   Das bedeutet: Durch das Lösen der Gleichungen $f_x = 0$, $f_y = 0$ erhalten wir die Kandidaten P , welche für ein lokales Extremum in Frage kommen.

   Obige Bedingung ist aber **nicht** hinreichend für das Vorliegen eines lokalen Extremums.

   Dazu bilden wir nun $\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$.

   Gilt $\Delta|_P > 0$ und $f_{xx}|_P > 0$, dann liegt im Punkt P ein **lokales Minimum** vor.

   Gilt $\Delta|_P > 0$ und $f_{xx}|_P < 0$, dann liegt im Punkt P ein **lokales Maximum** vor.

   Gilt $\Delta|_P < 0$ dann liegt im Punkt P ein sogenannter **Sattelpunkt** vor. Gilt $\Delta|_P = 0$ dann ist (vorderhand) keine Aussage möglich.

   Betrachtet man $f(x, y)$ auf einer kompakten Teilmenge B , dann gibt es auch absolute Minima und absolute Maxima, die auf dem Rand von B liegen können. Wird der Rand parametrisiert, dann erhalten wir eine Funktion **einer (!)** Veränderlichen, von der wir die Randextrema bestimmen können.

2. **Beispiel 90 c)**

Man bestimme die relativen Extrema von $f(x, y) = \ln(xy) - x^2 - \frac{y}{x}$.

Die notwendige Bedingung ist $f_x = 0$, $f_y = 0$. Also

$f_x = \frac{1}{x} - 2x + \frac{y}{x^2} = 0$, $f_y = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 0$.

Aus $f_y = 0$ folgt offenbar $x = y$. Eingesetzt in $f_x = 0$ folgt

$\frac{1}{x} - 2x + \frac{x}{x^2} = 0$ bzw. $x^2 = 1$ bzw. $x = \pm 1$.

Damit ergeben sich die Punkte $P_1(1, 1)$ und $P_2(-1, -1)$ als Kandidaten für lokale Extrema.

$f_{xx} = -\frac{1}{x^2} - 2 - \frac{2y}{x^3}$, $f_{xy} = \frac{1}{x^2}$, $f_{yy} = -\frac{1}{y^2}$

Für $P_1(1, 1)$ gilt

$f_{xx}|_{P_1} = -5$, $f_{xy}|_{P_1} = 1$, $f_{yy}|_{P_1} = -1 \quad \Rightarrow \quad \Delta|_{P_1} = 4 > 0$

Also liegt in $P_1(1, 1)$ ein relatives Maximum vor.

Für $P_2(-1, -1)$ gilt

$f_{xx}|_{P_2} = -5$, $f_{xy}|_{P_2} = 1$, $f_{yy}|_{P_2} = -1 \quad \Rightarrow \quad \Delta|_{P_2} = 4 > 0$

Also liegt in $P_2(-1, -1)$ ein relatives Maximum vor.

3. **Beispiel 92 b)**

Man bestimme die relativen und absoluten Extrema von $f(x, y) = 3x^2 - 2(y + 1)x + 3y - 1$ im Bereich $0 \leq x, y \leq 1$.

$f_x = 6x - 2(y + 1) = 0$, $f_y = -2x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{2}$

Eingesetzt in $f_x = 0$ ergibt sich $y = \frac{7}{2}$

Damit ist $P(\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ der einzige Kandidat für ein Extremum. Dieser Punkt liegt aber nicht im betrachteten Bereich.

Wegen $f_{xx} = 6$, $f_{xy} = -2$, $f_{yy} = 0$ und $\Delta|_P = -4 < 0$ wäre P zudem ein Sattelpunkt.

Der Rand des betrachteten Bereiches setzt sich aus vier Strecken zusammen, die wir getrennt untersuchen müssen.

Fall 1: $y = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$

$g(x) = f(x,0) = 3x^2 - 2x - 1$ und $g'(x) = 6x - 2$, $g''(x) = 6 > 0$

Daraus folgt $x = \frac{1}{3}$ und $g(\frac{1}{3}) = -\frac{4}{3}$. Also liegt in $x = \frac{1}{3}$ ein relatives Minimum vor.

Wir beobachten weiters, dass $g(0) = f(0,0) = -1$ und $g(1) = f(1,0) = 0$.

Fall 2: $x = 1 \quad , \quad 0 \leq y \leq 1$

$g(y) = f(1,y) = y$ und $g'(y) = 1$.

Wir beobachten weiters, dass $g(0) = f(1,0) = 0$ und $g(1) = f(1,1) = 1$.

Fall 3: $y = 1 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$

$g(x) = f(x,1) = 3x^2 - 4x + 2$ und $g'(x) = 6x - 4$, $g''(x) = 6 > 0$.

Daraus folgt $x = \frac{2}{3}$ und $g(\frac{2}{3}) = 1$. Also liegt in $x = \frac{2}{3}$ ein relatives Minimum vor.

Wir beobachten weiters, dass $g(0) = f(0,1) = 2$ und $g(1) = f(1,1) = 1$.

Fall 4: $x = 0 \quad , \quad 0 \leq y \leq 1$

$g(y) = f(0,y) = 3y - 1$ und $g'(y) = 3$.

Wir beobachten weiters, dass $g(0) = f(0,0) = -1$ und $g(1) = f(0,1) = 2$.

Insgesamt hat sich somit herausgestellt, dass es im Inneren des Bereiches keine relativen Extrema gibt. Für die Randextrema gilt, dass ein absolutes Maximum in $(0,1)$ vorliegt und ein absolutes Minimum in $(\frac{1}{3}, 0)$.

4. **Bemerkung.**

Manchmal sucht man die Extrema einer Funktion $f(x, y)$, aber nur für jene (x, y) , welche einer **Nebenbedingung** $g(x, y) = 0$ genügen.

In diesem Fall bildet man eine Hilfsfunktion

$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$

Die Lösungen des Gleichungssystems $F_x = 0$, $F_y = 0$, $F_\lambda = 0$ für die Unbekannten x, y, λ liefern dann die Kandidaten für ein Extremum. Ob an den gefundenen Stellen tatsächlich ein Extremum vorliegt, bedarf weiterer Untersuchungen, die oft schwierig sind.

Manchmal kann allerdings die **Einsetzmethode** verwendet werden, was an folgendem einfachen Beispiel demonstriert werden soll.

Beispiel. By fester Hypothenuse c soll jenes rechtwinkelige Dreieck bestimmt werden, das maximalen Flächeninhalt hat.

Bezeichnen wir mit x, y die Katheten des rechtwinkeligen Dreiecks, dann soll $f(x, y) = \frac{xy}{2}$ maximal werden unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = c^2$.

Da $x, y \geq 0$ können wir y aus der Nebenbedingung ausrechnen und in die Hauptbedingung einsetzen, wodurch wir eine Funktion einer Veränderlicher erhalten, deren Extrema wir bestimmen können.

$y = \sqrt{c^2 - x^2} \quad \Rightarrow \quad g(x) = \frac{x\sqrt{c^2-x^2}}{2} \to \text{Extr.}$

$g'(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{c^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{c^2-x^2}}) = \frac{c^2-2x^2}{2\sqrt{c^2-x^2}} = 0$ liefert

$x = \frac{c}{\sqrt{2}}$ und weiters $y = \frac{c}{\sqrt{2}}$.

Es handelt sich also um ein gleichschenkeliges rechtwinkeliges Dreieck.

5. **Beispiel 95 a)**

Man bestimme die Extrema von $f(x, y) = 7 - x - 2y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$ (bzw. $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$) .

Wir betrachten $\quad F(x,y,\lambda) = 7 - x - 2y + \lambda(x^2+y^2-1)$

$F_x = -1 + 2\lambda x = 0$

$F_y = -2 + 2\lambda y = 0$

$F_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0$

Wegen $2\lambda x = 1$ ist $\lambda \neq 0$ und $x = \frac{1}{2\lambda}$ und $y = \frac{1}{\lambda}$.

Mit $F_\lambda = 0$ folgt $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = \frac{5}{4}$ bzw. $\lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Für den Fall $\lambda = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ist $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ und $y = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Für den Fall $\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ ist $x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ und $y = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

6. **Beispiel 97) - Hinweis**

Der Abstand zwischen zwei Punkten (x_1,y_1) und (x_2,y_2) der Ebene ist bekanntlich $\quad d = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$.

Dieser Abstand wird genau dann minimal, wenn

$f(x_1,y_1,x_2,y_2) = d^2 = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2$ minimal wird.

Im konkreten Fall haben wir die Nebenbedingungen

$g(x_1,y_1) = y_1 - x_1^2 = 0 \quad$ und $\quad h(x,y) = y_2^2 - x_2 + 2 = 0$.

Wir erhalten als Hilfsfunktion $F(x_1,y_1,x_2,y_2,\lambda_1,\lambda_2) =$

$= (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + \lambda_1(y_1 - x_1^2) + \lambda_2(y_2^2 - x_2 + 2)$.

Setze nun $F_{x_1} = 0$, $F_{y_1} = 0$, $F_{x_2} = 0$, $F_{y_2} = 0$, $F_{\lambda_1} = 0$, $F_{\lambda_2} = 0$