Tutorium 26.06.2020

In dieser Einheit diskutieren wir Mehrfachintegrale.

1. **Beispiel 113 e).**

   Man bestimme $I = \iint\limits_B f(x,y)dxdy$, wobei $f(x,y) = x^2y$ und B das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ ist.

   Skizziert man den Bereich, dann sieht man leicht, dass dieser in folgender Form beschrieben werden kann.

   $B: \quad 0 \leq x \leq 1 \quad , \quad 0 \leq y \leq -x+1$

   Folglich ist $\quad I = \int\limits_{x=0}^{1} [\int\limits_{y=0}^{-x+1} x^2y \; dy]dx = \int\limits_{x=0}^{1} \frac{x^2y^2}{2} \Big|_{y=0}^{-x+1} dx =$

   $= \int\limits_{x=0}^{1} \frac{x^2}{2}(1-x)^2dx = \frac{1}{2} \int\limits_{x=0}^{1} (x^2 - 2x^3 + x^4)dx =$

   $= \frac{1}{2}(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}) \Big|_0^1 = \frac{1}{60}$

2. **Beispiel 113 h)**

   Man bestimme $I = \iint\limits_B f(x,y)dxdy$, wobei $f(x,y) = x^2$ ist und B von den Kurven $xy = 16$, $y = x$, $y = 0$, $x = 8$ begrenzt wird.

   Skizziert man den Bereich B , dann sieht man, dass dieser in zwei Normalbereiche aufgespalten werden muss, also $B = B_1 \cup B_2$ mit

   $B_1: \quad 0 \leq x \leq 4 \quad , \quad 0 \leq y \leq x$

   $B_2: \quad 4 \leq x \leq 8 \quad , \quad 0 \leq y \leq \frac{16}{x}$

Also $\quad I = \int\limits_{x=0}^{4} [\int\limits_{y=0}^{x} x^2 \; dy]dx + \int\limits_{x=4}^{8} [\int\limits_{y=0}^{\frac{16}{x}} x^2 \; dy]dx =$

$= \int\limits_{x=0}^{4} x^2y \,|_{y=0}^{x} dx + \int\limits_{x=4}^{8} x^2y \,|_{y=0}^{\frac{16}{x}} dx = \int\limits_{x=0}^{4} x^3 dx + \int\limits_{x=4}^{8} 16x dx =$

$= \frac{x^4}{4} \,|_{x=0}^{4} + 8x^2 \,|_{x=4}^{8} = 448$

3. **Beispiel 114 a)**

Bei der Transformation von $I = \iint\limits_{B} f(x,y)dxdy$ auf Polarkoordinaten wird das Flächenelement $dxdy$ durch $rdrd\varphi$ ersetzt und die Integration erfolgt über B' wobei B' die Beschreibung des Bereichs in Polarkoordinaten ist.

Ist also B beschrieben durch $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x^2 + y^2 \leq 4$, dann ist B ein Viertelkreis und eine Beschreibung in Polarkoordinaten lautet

B' : $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.

Folglich $\quad I = \int\limits_{r=0}^{2} \int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi$.

4. **Beispiel 122 a)**

Bei der Berechnung von Dreifachintegralen $I = \iiint\limits_{B} f(x,y,z)dxdydz$ besteht wiederum eine wichtige Aufgabe darin, den Bereich B als Normalbereich zu beschreiben.

Also etwa von der Form

$a \leq x \leq b$, $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$, $g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)$

x bewegt sich dabei innerhalb fester Grenzen, y zwischen einer unteren und oberen Begrenzungskurve und z zwischen einer unteren und oberen Begrenzungsfläche.

Dann ist $\quad I = \int\limits_{x=a}^{b} [\int\limits_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} [\int\limits_{z=g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z) dz] dy] dx$.

Durch Permutation der Variablen ergeben sich insgesamt 6 Möglichkeiten.

Man bestimme das Volumen jenes räumlichen Bereiches B , der durch die Flächen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$ begrenzt wird.

Das Volumen ist $V = \iiint\limits_{B} dx dy dz$.

Bemerkung. Liegen zwei Flächen $z = g_1(x,y)$ und $z = g_2(x,y)$ vor, dann erhalten wir durch Gleichsetzung der z-Koordinaten, also durch $g_1(x,y) = g_2(x,y)$ die Projektion der Schnittkurve in die xy-Ebene.

Die Projektion der Schnittkurve von $z = 0$ und $x + y + z = 1$ in die xy-Ebene ist offenbar $y = 1 - x$.

Die Projektion von B in die xy-Ebene ist ein Dreieck und damit beschreibbar in der Form

$0 \leq x \leq 1 \quad , \quad 0 \leq y \leq 1 - x$

Für einen Punkt des Dreiecks bewegt sich die z-Koordinate zwischen 0 und $1 - x - y$. Damit

$B: \quad 0 \leq x \leq 1 \quad , \quad 0 \leq y \leq 1 - x \quad , \quad 0 \leq z \leq 1 - x - y$

$$V = \int\limits_{x=0}^{1} [\int\limits_{y=0}^{1-x} [\int\limits_{z=0}^{1-x-y} dz] dy] dx = \int\limits_{x=0}^{1} [\int\limits_{y=0}^{1-x} z \,\Big|_{z=0}^{1-x-y} dy] dx =$$

$$= \int\limits_{x=0}^{1} [\int\limits_{y=0}^{1-x} (1 - x - y) dy] dx = \int\limits_{x=0}^{1} (y - xy - \tfrac{y^2}{2}) \,\Big|_{y=0}^{1-x} dx =$$

$$= \int\limits_{x=0}^{1} (1 - x - x(1-x) - \tfrac{1}{2}(1-x)^2) dx = \int\limits_{x=0}^{1} (\tfrac{1}{2} - x + \tfrac{x^2}{2}) dx =$$

$$= (\tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{6}) \,\Big|_{x=0}^{1} = \tfrac{1}{6}$$

5. **Beispiel 122 g)**

Man bestimme das Volumen jenes räumlichen Bereiches B, der vom Kegel $x^2+y^2=z^2$, $z>0$ und dem Zylinder $x^2+y^2=3x$ begrenzt wird.

Die Projektion des Zylinders in die xy-Ebene ist der Kreis

$(x-\frac{3}{2})^2+y^2=\frac{9}{4}$

Für die z-Koordinate von B gilt

$0 \le z^2 \le x^2+y^2 \quad$ bzw. $\quad 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}$

Wir führen nun Zylinderkoordinaten ein, also

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$

Dann ist $\quad dV = dxdydz = rdrd\varphi dz$

Der Kreis $x^2+y^2=3x$ wird zu $r^2 = 3r\cos\varphi$ bzw. $r = 3\cos\varphi$.

Damit wird der Bereich B beschrieben durch

$0 \le r \le 3\cos\varphi \quad , \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \quad , \quad 0 \le z \le r$

$$V = \int\limits_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\int\limits_{r=0}^{3\cos\varphi} [\int\limits_{z=0}^{r} rdz]dr]d\varphi = \int\limits_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\int\limits_{r=0}^{3\cos\varphi} rz\,|_{z=0}^{r}\,dr]d\varphi =$$

$$= \int\limits_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [\int\limits_{r=0}^{3\cos\varphi} r^2dr]d\varphi = \frac{1}{3}\int\limits_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^3\,|_{r=0}^{3\cos\varphi}\,d\varphi = 9\int\limits_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi d\varphi =$$

$$= 9(\frac{1}{3}\cos^2\varphi\sin\varphi + \frac{2}{3}\sin\varphi)\,|_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 9(0+\frac{2}{3}-(0-\frac{2}{3})) = 12$$

6. **Beispiel 123 e)** Hinweis

Man bestimme $I = \iiint\limits_{B} f(x,y,z)dxdydz$, wobei $f(x,y,z) = x$ ist und der Bereich B von den Flächen $x=0$, $y=0$, $z=2$, $z=x^2+y^2$ begrenzt wird.

Gleichsetzung der z-Koordinaten liefert $x^2 + y^2 = 2$. Dies ist ein Kreis in der xy-Ebene um den Ursprung mit Radius $\sqrt{2}$.

Der Bereich kann also beschrieben werden durch

$x^2 + y^2 \leq 2$, $x^2 + y^2 \leq z \leq 2$ bzw. in Zylinderkoordinaten

$0 \leq r \leq \sqrt{2}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $r^2 \leq z \leq 2$

Also $I = \int\limits_{r=0}^{\sqrt{2}} [\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} [\int\limits_{z=r^2}^{2} r^2 \cos\varphi dz]d\varphi]dr$

7. **Beispiel 124)** Hinweis

Man berechne das Volumen des Körpers, den der Zylinder $x^2 + y^2 = 2ay$, $a > 0$ aus der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ herausschneidet.

Der Zylinder $x^2 + y^2 = 2ay$ kann auch geschrieben werden als

$x^2 + (y-a)^2 = a^2$. Dessen Projektion in die xy-Ebene ist der Kreis mit Mittelpunkt $(0, a)$ und Radius a .

Die Gleichung des Kreises in Polarkoordinaten lautet

$r^2 = 2ar\sin\varphi$ bzw. $r = 2a\sin\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Mittels Zylinderkoordinaten erhalten wir für die Kugeloberfläche

$r^2 + z^2 = 4a^2$ bzw. $z = \pm\sqrt{4a^2 - r^2}$

In Zylinderkoordinaten kann der Volumsbereich somit beschrieben werden durch

$0 \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq r \leq 2a\sin\varphi$, $-\sqrt{4a^2 - r^2} \leq z \leq \sqrt{4a^2 - r^2}$

Wegen Symmetrie bzgl. der xy-Ebene ist dann

$V = 2 \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} [\int\limits_{r=0}^{2a\sin\varphi} [\int\limits_{z=0}^{\sqrt{4a^2-r^2}} r dz]dr]d\varphi$