# Vektoranalysis – Sommersemester 2010

# Blatt 1: Satz von Taylor, Extremwerte, Implizite Funktionen

## Aufwärmbeispiele

Aufwärmbeispiele dienen dazu, Ihnen grundlegende Begriffe und Rechenfertigkeiten in Erinnerung zu rufen. Das Rechnen dieser Beispiele ist nicht verpflichtend, aber es hilft Ihnen bei der Bewältigung der (schwierigeren) Ankreuzbeispiele.

1. **Gradient:** Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,\, y,\, z) = x^2\, \mathrm{e}^{y\, \sin z}.$$

2. **Klassifizierung von Extrema für Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:** Betrachten Sie eine (allgemein gehaltene) beliebig oft differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $x_0$. Begründen Sie mit dem Satz von Taylor die folgende Regel:

   *Ist die Ordnung $n$ der ersten nichtverschwindenden Ableitung gerade, so liegt an $x_0$ ein Extremum vor, und zwar ein Maximum für $f^{(n)}(x_0) < 0$ und ein Minimum für $f^{(n)}(x_0) > 0$. Ist hingegen die Ordnung $n$ der ersten nichtverschwindenden Ableitung ungerade, so liegt an $x_0$ kein Extremum vor.*

   Illustrieren Sie die verschiedenen Fälle durch einige Beispiele.

3. **Definitheit von Matrizen:** Rufen Sie sich Definition und Bedeutung der Begriffe *positiv/negativ (semi)definit* und *indefinit* in Erinnerung und untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf Definitheit:
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

4. **Extremwerte quadratischer Formen:** Finden Sie durch Nullsetzen des Gradienten alle kritischen Punkte der folgenden Funktionen $f_i\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und untersuchen Sie dort jeweils die Definitsheiteigenschaften der Hesse-Matrix:
$$f_1(x,\, y) = x^2 + y^2, \qquad f_2(x,\, y) = x^2 - y^2, \qquad f_3(x,\, y) = -x^2 - y^2$$
   Liegen an diesen Stellen Extrema vor, und wenn ja, welche?

5. **Bestimmung von implizit gegebenen Funktionen:** Bestimmen Sie jeweils eine stetige Funktion $y_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ mit $D(y_i) = [-1,\, 1]$, die die Gleichung
$$x^2 + y_i^2(x) = 1 \tag{1}$$
   erfüllt und die folgenden Werte annimmt:
$$y_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad y_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad y_3(1) = 0, \qquad y_4(-1) = 0$$
   Ist die Wahl von $y_i$ jeweils eindeutig?

   Leiten Sie aus (1) eine Differentialgleichung für $y_i$ her und bestimmen Sie mittels dieser Differentialgleichung $y_1'(\frac{1}{\sqrt{2}})$, $y_2'(-\frac{1}{\sqrt{2}})$, $y_3'(1)$ und $y_4'(-1)$.

# Ankreuzbeispiele

Die folgenden Beispiele können zu Beginn der Übungseinheit angekreuzt (bzw. in Ausnahmefällen schon davor in ausgearbeiteter Form abgegeben) werden. Für jedes angekreuzte Beispiel erhalten Sie einen halben Punkt bis zu einem Maximum von 18 Punkten für das gesamte Semester. Per Zufall wird ausgewählt, wer welches angekreuzte Beispiel an der Tafel vorrechnet. Können Sie ein von Ihnen angekreuztes Beispiel nicht vorrechnen[1], so werden Ihnen $2^n$ Kreuze aberkannt, wobei $n$ die Zahl der Beispiele bezeichnet, die von Ihnen bereits davor in diesem Semester nicht nicht präsentiert werden konnten.

1. **Satz von Taylor im Mehrdimensionalen:** Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung der Funktion $f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x,\, y) = x^y\,.$$

   mit Entwicklungsmitte $x_0 = y_0 = 1$ und ermitteln Sie damit näherungsweise den Wert von

$$(\sqrt[10]{0.95}\,)^{11}.$$

2. **Extremwerte im Mehrdimensionalen:** Bestimmen und klassifizieren Sie alle Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,\, y) = \big(x^2 - 1\big)^2\, \mathrm{e}^{-y^2}\,.$$

3. **Extrema mit Nebenbedingungen:** Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren alle Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,\, y) = x^2 + y^2$$

   unter der Nebenbedingung

$$g(x,\, y) = 3x^2 + 4y^2 - 5 = 0\,.$$

   Klassifizieren Sie die Extrema und geben Sie eine geometrische Interpretation des Beispiels.

4. **Hauptsatz über implizite Funktionen und implizites Differenzieren:** Zeigen Sie, dass sich die Gleichung

$$f(x,\, y) := x^2 y - x y^2\,.$$

   an der Stelle $x = 1$, $y = 1$ nach $y$ auflösen lässt und bestimmen Sie $y'(1)$ sowie $y''(1)$.

---

[1] Beim Vorrechnen ist es nicht zwingend erforderlich, dass die präsentierte Lösung richtig ist. Es muss aber erkennbar sein, dass Sie sich mit dem Beispiel ernsthaft beschäftigt haben.