# Vektoranalysis – Sommersemester 2010
# Blatt 2: Implizite Funktionen, Integration

## Aufwärmbeispiele

Aufwärmbeispiele dienen dazu, Ihnen grundlegende Begriffe und Rechenfertigkeiten in Erinnerung zu rufen. Das Rechnen dieser Beispiele ist nicht verpflichtend, aber es hilft Ihnen bei der Bewältigung der (schwierigeren) Ankreuzbeispiele.

1. **Jacobi-Matrix:** Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix der Funktion $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
$$\boldsymbol{f}(x,\, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ \mathrm{e}^{x\,\sin y} \end{pmatrix}$$

2. **Invertierbarkeit von Matrizen:** Überprüfen Sie, für welche $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$ die Matrix
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{xy} & 0 & \mathrm{e}^{xy} \\ y & 1 & 2x \\ x & 2 & y \end{pmatrix}$$
invertierbar ist.

3. **Integration von Polynomen:** Bestimmen Sie das Integral
$$I = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - 3x^2 + x - 1\right)\, \mathrm{d}x\,.$$

4. **Integration und Symmetrie:** Argumentieren Sie (a) mittels Stammfunktion, (b) anhand von Symmetrieüberlegungen, warum
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x = 0$$
sein muss.

## Ankreuzbeispiele

Die folgenden Beispiele können zu Beginn der Übungseinheit angekreuzt (bzw. in Ausnahmefällen schon davor in ausgearbeiteter Form abgegeben) werden. Für jedes angekreuzte Beispiel erhalten Sie einen halben Punkt bis zu einem Maximum von 18 Punkten für das gesamte Semester. Per Zufall wird ausgewählt, wer welches angekreuzte Beispiel an der Tafel vorrechnet. Können Sie ein von Ihnen angekreuztes Beispiel nicht vorrechnen[1], so werden Ihnen $2^n$ Kreuze aberkannt, wobei $n$ die Zahl der Beispiele bezeichnet, die von Ihnen bereits davor in diesem Semester nicht nicht präsentiert werden konnten.

[1] Beim Vorrechnen ist es nicht zwingend erforderlich, dass die präsentierte Lösung richtig ist. Es muss aber erkennbar sein, dass Sie sich mit dem Beispiel ernsthaft beschäftigt haben.

1. **Auflösbarkeit von Gleichungssystemen:** Zeigen Sie, dass sich das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
f_1(x,\, y,\, z) &= x\,\mathrm{e}^z - y^2\,\mathrm{e}^{xz} = 0, \\
f_2(x,\, y,\, z) &= xy + z^2 - y = 0
\end{aligned}
$$

am Punkt $x = y = 1,\ z = 0$ nach $x$ und $y$ auflösen lässt. Bestimmen Sie für diese Auflösungen $x'(0)$ und $y'(0)$.

2. **Integration (I):** Bestimmen Sie zumindest zwei der folgenden Integrale

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int x^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\
I_2 &= \int t\,\cosh(t^2)\,\mathrm{d}t \\
I_3 &= \int \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

3. **Integration (II):** Bestimmen Sie zumindest zwei der folgenden Integrale

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \int_0^1 r^2\,\sqrt{1-r}\,\mathrm{d}r \\
I_5 &= \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x \\
I_6 &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^3\varphi}{1+\cos^2\varphi+\cos^4\varphi}\,\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}
$$

4. **Partialbruchzerlegung:** Leiten Sie mit Hilfe des Integrals

$$
I = \int_0^1 \frac{x^4\,(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,.
$$

eine Abschätzung für $\pi$ her.

5. **Orthogonalisierung von Polynomen:** Bestimmen Sie die Koeffizienten der Polynome

$$
\begin{aligned}
P_0(x) &= a_{00}\,, \\
P_1(x) &= a_{10} + a_{11}x\,, \\
P_2(x) &= a_{20} + a_{21}x + a_{22}x^2\,, \\
P_3(x) &= a_{30} + a_{31}x + a_{32}x^2 + a_{33}x^3
\end{aligned}
$$

so, dass $P_i(1) = 1$ für $i = 0, 1, 2, 3$ und

$$
\int_{-1}^1 P_i(x)\,P_j(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{für } i \neq j \text{ ist.}
$$