Vektoranalysis – Sommersemester 2010

Blatt 4: Kurven, Flächen und ein wenig Integration

Aufwärmbeispiele

Aufwärmbeispiele dienen dazu, Ihnen grundlegende Begriffe und Rechenfertigkeiten in Erinnerung zu rufen. Das Rechnen dieser Beispiele ist nicht verpflichtend, aber es hilft Ihnen bei der Bewältigung der (schwierigeren) Ankreuzbeispiele.

1. **Kreuzprodukt, Skalarprodukt:** Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   Finden sie einen Vektor der normal auf die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Fläche ist und bestimmen sie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

2. **Parameterdarstellung einer Ellipse in Hauptlage:** Finden Sie eine Parameterdarstellung für die Kurve in implziter Form $4x^2 + 9y^2 = 1$.

3. **Tangetialvektoren:** Gegeben sei ein Kreis $k(t) = \begin{pmatrix} 3\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{pmatrix}$ mit $t \in [0, 2\pi]$ in Parameterform, bestimmen sie für alle $t \in [0, 2\pi]$ den Tangentialvektor.

4. **Parameterdarstellung von Flächen:** Gebeben sei die Gleichung in impliziter Form $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, finden sie ein Parameter darstellung dieser Fläche.

Ankreuzbeispiele

Die folgenden Beispiele können zu Beginn der Übungseinheit angekreuzt (bzw. in Ausnahmefüllen schon davor in ausgearbeiteter Form abgegeben) werden. Für jedes angekreuzte Beispiel erhalten Sie einen halben Punkt bis zu einem Maximum von 18 Punkten für das gesamte Semester. Per Zufall wird ausgewählt, wer welches angekreuzte Beispiel an der Tafel vorrechnet. Können Sie ein von Ihnen angekreuztes Beispiel nicht vorrechnen[1], so werden Ihnen 2^n Kreuze aberkannt, wobei n die Zahl der Beispiele bezeichnet, die von Ihnen bereits davor in diesem Semester nicht nicht präsentiert werden konnten.

1. **Ein paar Integrale:** Bestimmen Sie die folgende unbestimmte Integrale

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}, \quad \int \frac{\sqrt{1 + x^6}}{x} dx$$

   und berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$I = \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}.$$

[1] Beim Vorrechnen ist es nicht zwingend erforderlich, dass die präsentierte Lösung richtig ist. Es muss aber erkennbar sein, dass Sie sich mit dem Beispiel ernsthaft beschäftigt haben.

2. **Parameterdarstellungen:** Finden Sie jeweils zwei Parameterdarstellung für $x < 0, x > 0$ der Kurven, die der Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ genügen, und skizzieren Sie ihren Velauf.

3. **Bogenlänge und begleitendes Dreibein:** Gegeben sei die Raumkurve

$$f(t) := \begin{pmatrix} \sin(2t)/2 \\ \sin^2(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{für } t \in [0, 2\pi].$$

   - Ist f eine *Jordan*-Kurve bzw. in welchen Intervallen von $[0, 2\pi]$ ist f eine *Jordan*-Kurve?

   - Ist f rektifizierbar in den entsprechen Intervallen, wenn ja finden Sie einen möglichst einfachen Ausdruck für die Bogenlänge von f in den entsprechenden Intervallen.

   - Berechnen Sie das begleitende Dreibein sowie die Krümmung und die Torsion von f in jedem Punkt in Abhängigkeit von t.
   - Skizzieren Sie f.

4. **Parameterdarstellung von Flächen:** Gegeben sei die Fläche

$$F(\varphi, \delta) = \begin{pmatrix} (1 + \frac{\cos(\delta)}{2}) \cos(\varphi) \\ (1 + \frac{\cos(\delta)}{2}) \sin(\varphi) \\ \frac{\sin(\delta)}{2} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \varphi, \delta \in [0, 2\pi]$$

   in Parameterdarstellung.
   - Um welche Kurven handelt es sich, wenn man φ als Konstante betrachtet?
   - Berechnen sie Oberfläche von F sowie das Volumen, des von F umgebenen Körpers (guldinsche Regel).

$$k(t) = \begin{pmatrix} (1 + \frac{\cos(10t)}{2}) \cos(t) \\ (1 + \frac{\cos(10t)}{2}) \sin(t) \\ \frac{\sin(10t)}{2} \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in [0, 2\pi] \text{ ist eine Kurve auf } F.$$

   - Berechnen Sie die Winkel zwischen den Tangentialvektoren von $k(t)$ und $F(0, \delta)$ in den Schnittpunkten der beiden Kurven. Ist der Winkel zwischen den Tangentialvektoren von $k(t)$ und $F(a, \delta)$ in den Schnittpunkten der Kurven für alle $a \in [0, 2\pi]$ gleich?
   - Berechnen Sie die Krümmung und die Torsion von $k(t)$ in jedem Punkt.

5. **Noch eine Fläche:** Gegeben sei die Fläche A in impliziter Form $z^2 = x^2 + (y-1)^2$. Finden Sie eine Parameterdarstellung dieser Fläche und bestimmen Sie die Tangentialebene an A sowie den Normavektor im Punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$.
   Beschreiben sie die Kurven die enstehen, wenn man A mit der xz-Ebene schneidet, und skizzieren Sie A sowie die Schnittkurven.