

1. a) Konstruieren Sie zu dem Anfangswertproblem $y' = 3y$, $y(0) = 1$ den Eulerschen Polygonzug mit Schrittweite $h = 0.2$ auf dem Intervall $[0, 1]$. Verifizieren Sie, dass $y(x) = e^{3x}$ die Lösung der Differentialgleichung ist. Berechnen Sie den Fehler e_n an den Stützstellen.
b) Beweisen Sie, dass $e_n \rightarrow 0$ wenn $N \rightarrow \infty$, wobei N die Anzahl der Stützstellen ist. Hinweis: finden Sie Konstanten K, M , sodass $|f(x, y) - f(x, z)| \leq K|y - z|$ und $|y''(x)| \leq M$ für $x \in [0, 1]$, und verwenden Sie für e_n eine obere Schranke.

2. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' + y \cos x = y^3 \cos x.$$

3. Finden Sie alle(!) Lösungen von

$$y' = 2\sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0.$$

Beachten Sie, dass $y = 0$ eine Lösung ist, und dass Lösungen keineswegs eindeutig sein müssen.

4. Lösen Sie

$$xy' = y \ln y, \quad y(1) = e$$

5. Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$5\frac{y^2}{x} - 4y = xy', \quad y(2) = 5.$$

6. Prüfen Sie, ob die Differentialgleichungen

a) $(y - x^3) + (y^3 + x)y' = 0$,

b) $\cos x \cos y - (\sin x \sin y + y^2)y' = 0$

exakt sind, und lösen Sie sie gegebenenfalls.