30. Bestimmen Sie die Laplace-Transformationen folgender Funktionen (mithilfe der Tabelle Laplace-Transformationen):

    a) $f(t) = e^{-2t} \cos^2 3t - 3t^2 e^{3t}$.

    b) $f(t) = e^t \frac{d^{100}}{dt^{100}}(e^{-t} t^{100})$.

    c) $f(t) = \frac{1}{2} \int_0^t e^{t-\tau}(\tau - t) \sin(2\tau) d\tau$.

31. Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme (AWP) durch Laplace-Transformation:

    a) $x^{(3)} - 6\ddot{x} + 12\dot{x} - 8x = e^{2t}, \quad x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0.$

    b) $y'' + y' = e^{c-t}\mathcal{U}_c(t), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ c > 0.$

    c) $y'' + 4y' + 5y = 100e^{-2t}, \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 0.$

32. Auf einem Federpendel mit der Masse $m$, der Kreisfrequenz $\omega$, der Anfangsauslenkung $y(0) = y_0$ und der Anfangsgeschwindigkeit $v_0$ wirkt eine konstante äussere Kraft $f_0$. Die mathematische Modellierung ergibt dann das AWP

    $$y'' + \omega^2 y = \frac{f_0}{m}, \quad y(0) = y_0,\ y'(0) = v_0.$$

    Bestimmen Sie die Lösung dieses AWP.

33. Lösen Sie durch Laplace-Transformation das folgende System linearer Differentialgleichungen

    $$\begin{aligned} \dot{x} &= \ x + y, \\ \dot{y} &= \ 8x + 3y. \end{aligned}$$

    unter den Anfangsbedingungen $x(0) = y(0) = 2$.

34. Sei $f : [0, \infty) \to \mathrm{R}$ Laplace-transformierbar und periodisch, mit der Periode $T > 0$ (d.h. $\forall t \geq 0.\ f(t+T) = f(t)$). Zeigen Sie, dass $F(s) = L\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$. Hinweis: verwenden Sie $\mathcal{U}_T(t)$.

35. Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte folgender periodischen Funktionen:

    a) $f(t) = t$ für $0 \leq t < 1; \quad f(t+1) = f(t).$

    b) $f(t) = \sin t$ für $0 \leq t < \pi; \quad f(t+\pi) = f(t).$