SS2010

Graz University of Technology

Franz Lehner
8.3.2010

Department of Mathematical Structure Theory

Computermathematik 2 (TM) - Blatt №1

Übung 1.

π als Kettenbruch.

(a) Brouncker (1665) hat folgenden Ausdruck für π gefunden:

$$\pi = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \ddots}}}}}}$$

Er kann dazu benutzt werden, rationale Approximationen zu berechnen. Wieviele Schritte des Kettenbruchs muß man durchführen, bis der Fehler kleiner als 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, ... wird?

Hinweis: `ContinuedFraction`, `convergents`.

(b) Fleißaufgabe: wie bekommt man in `FriCAS` die "optimale" Darstellung als Kettenbruch (den sogenannten *regulären* Kettenbruch[a])? Es genügt, eine gute Gleitkommanäherung durch einen Kettenbruch darzustellen. Wieviele Schritte des Kettenbruchs muß man jetzt durchführen, bis der Fehler kleiner als 10^{-1000} wird?

[a] siehe z.B. Wikipedia für die Definition

Übung 2.

Reihenentwicklungen für π.

(a) Entwickle $\arctan x$ in eine Taylorreihe und bestimme daraus eine Approximation für π. Wieviele Reihenglieder muß man addieren, um den Fehler kleiner als 10^{-1000} zu machen (experimentell/strenge Abschätzung)?

(b) Das gleiche für die von Rāmānujan gefundene und erst 1987 von Borwein bewiesene Reihendarstellung

$$\frac{9801\sqrt{2}}{4\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{n!^4} \frac{1}{396^{4n}} (26390n + 1103)$$

Übung 3.
Die *Čebyšëv-Polynome* erster Art sind definiert durch die Rekurrenzgleichung

$$T_0(x) = 1 \qquad T_1(x) = x \qquad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Verifiziere bis zur Ordnung 10 die Identitäten

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\, t^n = \frac{1-tx}{1-2tx+t^2}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\, \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{2}\left(e^{(x-\sqrt{x^2-1})\,t} + e^{(x+\sqrt{x^2-1})\,t}\right)$$

Übung 4.
Betrachte die Gleichung

$$((x-a)^2+y^2)((x+a)^2+y^2) = b^4$$

die für fixe Werte der Parameter a und b implizit eine ebene Kurve definiert.

(a) Skizziere die Lösungskurven für $a = 1$ und verschiedene Werte von b.

Hinweis: `draw`, Jenks/Sutor Abschnitt 7.1.3. Vorsicht, für gewisse Werte der Parameter treten sogenannte "Singularitäten" auf, und FriCAS weigert sich, die Kurve zu zeichnen; solche Werte einfach vermeiden.

(b) Drücke die Ableitungen $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dx}{dy}$ auf der Kurve durch x und y aus, und zwar ohne "Radikale" (Wurzelausdrücke).

Hinweis: `rootOf(p,y)`

(c) Bestimme die Punkte mit horizontaler und vertikaler Tangente.

(d) Welche Beziehung muß zwischen den Parametern herrschen, damit die Kurve die Form einer 8 bekommt? (d.h., damit genau 3 Schnittpunkte mit der x-Achse vorliegen?)

Hinweis: `discriminant`. Die *Diskriminante* eines Polynoms $p(x)$ ist die Resultante von $p(x)$ und $p'(x)$. Warum ist das hier relevant?

(e) Bestimme den Inhalt der Fläche, die links von der Geraden $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und rechts von der Achterkurve für den Parameterwert $a = 1$ eingeschlossene wird.

Hinweis: Man kann auch `rootOf`-Ausdrücke integrieren!