Graz University of Technology

SS2010

Franz Lehner
15.3.2010

Department of Mathematical Structure Theory

Computermathematik 2 (TM) - Blatt №2

Übung 5.

Bestimme, wenn möglich, den Wert von $\cos(2\pi/n)$, $n = 2, 3, \ldots$ als Lösung einer algebraischen Gleichung.

(a) Eine algebraische Gleichung erhält man durch Anwendung der Additionstheoreme

$$\sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y \qquad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

sowie des pythagoräischen Lehrsatzes in Form von Ersetzungsregeln (`rule`) auf eine geeignete Identität. Vergleiche die erhaltenen Polynome mit den Čebyšëv-Polynomen aus Übung 3.

(b) Bestimme einen algebraischen Ausdruck für $\cos(2\pi/n)$. Die "richtige" Lösung kann durch Vergleich mit einer numerischen Näherung bestimmt werden ($\varepsilon = 10^{-5}$ ist ausreichend).

(c) Das zu gegebenem n in Punkt (a) erhaltene Polynom ist nicht irreduzibel. Ermittle denjenigen irreduziblen Faktor, der die "richtige" Lösung enthält. Dieses Polynom heißt *Minimalpolynom* der betreffenden algebraischen Zahl.

(d) Bestimme diejenigen n, für die $\cos(2\pi/n)$ durch geschachtelte *Quadrat*wurzeln alleine (d.h. ohne Wurzeln höherer Ordnung) ausgedrückt werden kann. Dazu kann folgende Funktion verwendet werden (separat als `Blatt02.input` erhältlich):

```
allkernels:Expression Integer->List Kernel Expression Integer
allkernels ex ==
   ker:=kernels ex
   arg:=concat [argument x for x in ker]
   concat(ker,concat [allkernels a for a in arg])
```

Was macht diese Funktion? (Hinweis: Jenks/Sutor Kap. 9.44 lesen und experimentieren mit `kernels`, `is?`, `name`, `argument`,...).

Übung 6.
Seien f und g unendlich oft differenzierbare Funktionen.

(a) Finde Ausdrücke für die Ableitungen von $h(x) = f \circ g(x)$, z.B.:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\, g'(x)$$
$$\frac{d^2}{dx^2} f(g(x)) = f'(g(x))\, g''(x) + g'(x)^2\, f''(g(x))$$
$$\frac{d^3}{dx^3} f(g(x)) = f'(g(x))\, g'''(x) + g'(x)^3\, f'''(g(x)) + 3\, g'(x)\, f''(g(x))\, g''(x)$$
$$\ldots$$

Hinweis: `operator`.

(b) Bestimme die Anzahl der Terme der n-ten Ableitung (mit Vielfachheit, z.B. besitzt die dritte Ableitung 5 Terme und nicht 3!), und stelle fest `http://www.research.att.com/~njas/sequences/`, wie die entsprechende Zahlenfolge heißt.

Hinweis: am einfachsten ist es, f und g geeignet zu wählen, ansonsten durch geeignete Substitutionen in ein Polynom o.ä. umwandeln wie in Punkt (c).

(c) Drücke die n-te Ableitung von f an der Stelle $g(x)$ durch die Ableitungen von $h(x)$ und $g(x)$ aus (für $n = 0, 1, \ldots, 10$).

Hinweis: Zum Lösen des Gleichungssystems die formalem Ausdrücke $f^{(k)}(g(x))$ durch geeignete Symbole ersetzen!