SS2010

Graz University of Technology

Franz Lehner
3.5.2010

Department of Mathematical Structure Theory

Computermathematik 2 (TM) - Blatt №5

Übung 12.

(a) Implementiere eine Funktion `gramSchmidt(inner,vv)`, die für ein gegebenes inneres Produkt `inner(v,w)` und eine Liste von Vektoren `vv` eine Orthonormalbasis nach dem Gram-Schmidt-Verfahren berechnet.

(b) Teste die Funktion an den Vektoren

$$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$$

mit dem inneren Produkt $\langle x,y\rangle = y^t Ax$, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 3 & 10 & 4 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

und bestimme die Koordinaten des Vektors $(7,2,-5)$ bezüglich der so gefundenen Orthonormalbasis.

(c) Teste die Funktion an den Polynomen

$$1, x, x^2, \dots, x^5$$

bezüglich des inneren Produkts

$$\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{p(x)q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

(d) Bestimme die Matrix der Orthogonalprojektion auf den von den Vektoren

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

aufgespannten Unterraum von $\mathbb{R}^4$ (mit dem üblichen inneren Produkt $\langle x,y\rangle = y^t \cdot x$).

Übung 13.

Als *Quaternionen* eines Körpers $\mathbf{K}$ bezeichnet man den Vektorraum

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{K}) = \{a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} : a_j \in \mathbf{K}\}$$

auf dem man durch die Regeln

$$\begin{gathered} \mathbf{1} \cdot x = x \cdot \mathbf{1} \quad \forall x \in \mathbf{H} \\ \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1} \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = -\mathbf{k} \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{i} \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{j} \end{gathered}$$

und deren lineare Erweiterung eine Multiplikation erklärt. Reelle Quaternionen können mit den sogenannten *Pauli-Matrizen*

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

als komplexe 2×2-Matrizen in der Form

$$a_0\sigma_0 + a_1 i\sigma_3 + a_2 i\sigma_2 + a_3 i\sigma_1$$

dargestellt werden. Quaternionenmultiplikation entspricht dann dem Matrixprodukt. Schreibe jeweils eine Funktion, die

1. ein Quadrupel (a_0, a_1, a_2, a_3) in die Matrixdarstellung überführt.
2. aus der Matrixdarstellung die Koeffizienten (a_0, a_1, a_2, a_3) zurückgewinnt. Dabei kann ausgenützt werden, daß die Pauli-Matrizen bezüglich des inneren Produkts

   $$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(B^t \cdot A)$$

   eine Orthogonalbasis der 2×2 Matrizen $M_2(\mathbb{C})$ bilden.
3. die Multiplikation zweier Quadrupel (a_0, a_1, a_2, a_3) und (b_0, b_1, b_2, b_3) durchführt.
4. das Inverse (bezüglich Multiplikation) eines Quadrupels (a_0, a_1, a_2, a_3) bestimmt.

Die eigentlichen Operationen (Multiplikation, Inversion) sollen nach den entsprechenden Konvertierungen über den Matrizen durchgeführt werden. Vergleiche die Funktionen anhand einiger Beispiele mit den Operationen im eingebauten Domain `Quaternion`.