Aufgabe 11. (a) Sei $g = \{(1,-1) + t\,(2,-1) : t \in \mathbb{R}\}$ Bestimme reelle Zahlen a, b, c sodaß $g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a\,x + b\,y = c\}$.

(b) Sei $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 3\}$. Bestimme Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sodaß $E = \{\vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

Sind die Lösungen eindeutig?

Aufgabe 12. Stelle fest, ob die folgenden Operationen kommutativ/assoziativ sind. Welche Paare $(X, \circ)$ bilden Gruppen? Bestimme ggf. neutrale und inverse Elemente.

(a) $X = \mathbb{R}$, $x \circ y = \max(x, y)$
(b) $X = \mathbb{R}$, $x \circ y = x + y + 1$
(c) $X = \mathbb{R}$, $x \circ y = x + y + xy$

Aufgabe 13. Zeichne die folgenden Teilmengen der komplexen Ebene $\mathbb{C}$:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - i| < 2\}$
(b) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z^2) < 4\}$
(c) $\{z \in \mathbb{C} : |\bar{z} - i| = \operatorname{Re}(z)\}$

Aufgabe 14. (a) Zeige, daß für $a,\, b \in \mathbb{C}$ gilt $|ab| = |a|\,|b|$.

(b) Folgerung: die Menge $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ist (mit der Multiplikation als Gruppenoperation) eine Gruppe. Bestimme das neutrale Element und zu gegebenem $z \in \mathbb{T}$ das inverse Element.

(c) Sei $z_0 \in \mathbb{T}$. Zeige: (i) Die Menge $\{z_0^n : n \in \mathbb{Z}\}$ bildet eine Gruppe bezüglich der Multiplikation. (ii) Die Gruppe ist endlich genau dann, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt sodaß $z_0^N = 1$.

Aufgabe 15. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} (-2+i)\,x & - & 2\,y & - & z & = & -2+i \\ (3+i)\,x & + & (9-i)\,y & + & 3\,z & = & 6 \\ x & + & 3\,y & + & z & = & 2 \end{array}$$

über den komplexen Zahlen mit Hilfe des Gauß-Jordanschen Eliminationsverfahrens.