Aufgabe 28. Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge linear unabhängiger Teilmengen $A_i \subseteq V$, sodaß $A_i \subseteq A_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
Zeige, daß auch die Menge $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 29. Sei $V = \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der reellen Polynome. Untersuche, ob die Polynome

$$p_1 = (x-1)(x-2) \qquad p_2 = (x-2)(x-3) \qquad p_2 = (x-1)(x-3)$$

linear unabhängig sind.

Aufgabe 30. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ und $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ jeweils linear unabhängige Mengen. Seien $U = \mathcal{L}(\{u_1, u_2, \ldots, u_m\})$ und $W = \mathcal{L}(\{w_1, w_2, \ldots, w_n\})$ die linearen Hüllen.
Zeige: Die Vereinigungsmenge $\{u_1, u_2, \ldots, u_m, w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ ist linear unabhängig genau dann, wenn $U \cap W = \{0\}$.

Aufgabe 31. Gegeben seien die Unterräume

$$U_1 = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix}-2\\12\\-6\\-5\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-16\\4\\-2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-9\\8\\-4\\-2\\-1\end{pmatrix}\right\}\right) \qquad U_2 = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix}-6\\-3\\0\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-10\\7\\-2\\-2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\11\\-1\\-6\\-4\end{pmatrix}\right\}\right)$$

des $\mathbb{R}^5$. Bestimme jeweils eine Basis von (a) $U_1 \cap U_2$ und (b) $U_1 + U_2$.

Aufgabe 32. Sei U der Unterraum von $(\mathbb{Z}_3)^4$, der von den Vektoren

$$\{[2,\ 0,\ 0,\ 1],\ [1,\ 0,\ 0,\ 2],\ [1,\ 0,\ 2,\ 1],\ [2,\ 0,\ 2,\ 0],\ [1,\ 0,\ 1,\ 0]\}$$

aufgespannt wird.

(a) Bestimme eine Basis von U.
(b) Erweitere die Basis zu einer Basis von $(\mathbb{Z}_3)^4$.