Aufgabe 33. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit Basis $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ und seien $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ Vektoren mit eindeutigen Darstellungen $v_i = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} b_j$. Zeige: $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ ist linear unabhängig genau dann, wenn die Menge der Koordinatenvektoren

$$\{(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1n}), (\lambda_{21}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2n}), \dots, (\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kn})\}$$

linear unabhängig in $\mathbb{K}^n$ ist.

Aufgabe 34. Sei $V = \mathbb{R}^4$ und

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Zeige, daß V von M_1 erzeugt wird und daß M_2 linear unabhängig ist, und ergänze M_2 durch Hinzunahme von Elementen aus M_1 zu einer Basis von V.

Aufgabe 35. Sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ der Vektorraum aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeige, daß

$$U_+ = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = f(-x) \,\forall x \in \mathbb{R}\} \qquad U_- = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = -f(-x) \,\forall x \in \mathbb{R}\}$$

jeweils Unterräume von V sind und daß $V = U_+ \oplus U_-$ (direkte Summe).

Aufgabe 36. Seien W_1 und W_2 Unterräume eines Vektorraums V. Zeige: $W_1 \cup W_2$ ist ein Unterraum genau dann, wenn entweder gilt $W_1 \subseteq W_2$ oder $W_2 \subseteq W_1$.

Aufgabe 37. Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und $U_1, U_2, U_3 \subseteq V$ drei Unterräume. Zeige, daß

$$(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) \subseteq U_1 \cap (U_2 + U_3).$$

Zeige weiters durch Angabe eines Gegenbeispiels, daß Gleichheit im Allgemeinen nicht erfüllt ist.

Aufgabe 38. Sei V ein Vektorraum der Dimension n and seien U und W zwei verschiedene Unterräume der Dimension $n-1$. Zeige, daß $\dim(U \cap W) = n-2$.