Aufgabe 39. Gib drei Untervektorräume U, V und W des $\mathbb{R}^3$ an, sodaß zwar $U \cap V = \{0\}$, $V \cap W = \{0\}$ und $U \cap W = \{0\}$, aber $U + V + W$ keine direkte Summe ist.

Aufgabe 40. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Eine *aufsteigende Unterraumkette der Länge* r ist eine Folge $(U_0, U_1, \ldots, U_r)$ von Unterräumen $U_i \subseteq V$ sodaß $U_i \subsetneq U_{i+1}$. Zeige

(a) Für jede Unterraumkette $(U_0, U_1, \ldots, U_r)$ gilt $r \leq \dim V$.

(b) Es existiert eine maximale Unterraumkette der Länge $r = \dim V$. Ist diese eindeutig?

Aufgabe 41. Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $A \subseteq V$ eine Teilmenge (nicht unbedingt endlich), sodaß $V = L(A)$. Zeige, daß man eine endliche Teilmenge $B \subseteq A$ finden kann, die eine Basis von V bildet.
Hinweis: Bestimme zunächst eine endliche Teilmenge von A, die den Vektorraum erzeugt.