Aufgabe 47. Zeige, daß es genau eine lineare Abbildung von $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to \mathbb{Z}_5$ mit den Werten

$$f((1,1,1)) = 1, \qquad f((1,1,4)) = 1, \qquad f((0,1,1)) = 1$$

gibt und bestimme a, b, $c \in \mathbb{Z}_5$ so, daß $f((x,y,z)) = ax + by + cz$ für alle x, y, $z \in \mathbb{Z}_5$ gilt.

Aufgabe 48. Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Bestimme alle linearen Abbildungen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $F(v_j) = w_j$ für $j \in \{1,2,3\}$ sowie deren Matrixdarstellung bezüglich der Standardbasen in $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 49. Sei $\mathbb{R}[x]_3$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 über $\mathbb{R}$. Bestimme die Matrixdarstellung der linearen Abbildung

$$\begin{aligned} Q : \mathbb{R}[x]_2 &\to \mathbb{R}[x]_3 \\ p(x) &\mapsto x \cdot p(x) \end{aligned}$$

bezüglich der Basen (T_0, T_1, T_2) für $\mathbb{R}[x]_2$ und (T_0, T_1, T_2, T_3) für $\mathbb{R}[x]_3$, wobei

$$T_0(x) = 1 \qquad T_1(x) = x \qquad T_2(x) = 2x^2 - 1 \qquad T_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

Aufgabe 50. Seien U, V, W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$ und seien $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen. Zeige, daß $g \circ f : U \to W$ ebenfalls linear ist.

Aufgabe 51. Seien V, W Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Seien weiters v_1, v_2, $\ldots$, $v_n \in V$. Zeige: Wenn $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$ linear unabhängig ist, dann auch $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
Wann gilt auch der umgekehrte Schluß?