Aufgabe 58. Sei V ein Vektorraum $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Sei $v \in V$ ein Vektor mit der Eigenschaft, daß $f^{n-1}(v) \neq 0$ ist aber $f^n(v) = 0$. Zeige, daß $\{v, f(v), f^2(v), \dots, f^{n-1}(v)\}$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 59. Bestimme jeweils eine Basis von Kern und Bild der linearen Abbildung

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^{2\times 2} &\to \mathbb{R}^2 \\ A &\mapsto Av \end{aligned}$$

wobei $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$.

Aufgabe 60. Gegeben seien die linearen Abbildungen $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f : (x_1, x_2) \mapsto (x_1+x_2, x_1-x_2)$ $\quad g : (x_1, x_2) \mapsto (x_1+x_2, x_1+x_2)$ $\quad h : (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1)$

Zeige, daß die Menge $\{f, g, h\}$ linear unabhängig ist, wenn man sie als Teilmenge des Vektorraums[1] $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ auffaßt.

Aufgabe 61. Sei V ein Vektorraum und $f : V \to V$ eine *nilpotente* lineare Abbildung, d.h., es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, sodaß $f^k = 0$.

(a) Zeige, daß $\mathrm{id}_V - f$ invertierbar ist mit $(\mathrm{id}_V - f)^{-1} = \mathrm{id}_V + f + f^2 + \cdots + f^{k-1}$

(b) Verwende (a), um die die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen.

Aufgabe 62. Bestimme eine Permutationsmatrix P, sowie je eine linke und eine rechte Dreiecksmatrix L und R, sodaß $A = PLR$ für

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 10 & 7 & 6 \\ 15 & 0 & -10 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

[1] In der Vorlesung mit $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ bezeichnet.