Aufgabe 63. Bestimme diejenigen Werte von α, für die das lineare reelle Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & -1 \\ 2x & + & 3y & + & \alpha z & = & -2\alpha + 3 \\ x & + & \alpha y & + & z & = & 1 \end{array}$$

(a) keine Lösung (b) genau eine Lösung (c) unendlich viele Lösungen hat und gib jeweils die Lösungsmenge an.

Aufgabe 64. Für welche Werte von a ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a & 4 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{Z}_5$ invertierbar?

Aufgabe 65. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, und V^* der Dualraum. Zeige:
$E \subseteq V$ ist ein Erzeugendensystem genau dann, wenn gilt:

$$\forall w^* \in V^* : \big[(\forall v \in E : \langle w^*, v\rangle = 0) \implies w^* = 0\big]$$

Aufgabe 66. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum.

(a) Zeige, daß durch $u \sim v \iff u - v \in U$ eine Äquivalenzrelation auf V erklärt wird, wobei die Äquivalenzklasse $[v]$ eines Elements $v \in V$ genau durch die lineare Mannitfaltigkeit $v + U$ gegeben ist.

(b) Zeige, daß die Menge der Äquivalenzklassen $V/U = \{[v] : v \in V\}$ mit den Operationen

$$+ : V/U \times V/U \to V/U \qquad \cdot : \mathbb{K} \times V/U \to V/U$$
$$[u] + [v] := [u + v] \qquad \lambda \cdot [v] := [\lambda v]$$

einen Vektorraum bildet.

(c) Sei $f : V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung und $U = \ker f$. Zeige, daß durch $\tilde{f}([v]) = f(v)$ ein Isormorphismus $\tilde{f} : V/U \to W$ definiert wird.

Aufgabe 67. Es sei ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{K}_{m\times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$ gegeben. Die Faustregel

Anzahl der freien Parameter = Anzahl der Unbekannten - Anzahl der Gleichungen

trifft nicht immer zu:

(a) Gib ein Beispiel eines Gleichungssystems mit drei Gleichungen in zwei Unbekannten an, das genau eine Lösung besitzt.

(b) Gib ein Beispiel eines Gleichungssystems mit drei Gleichungen in drei Unbekannten an, das keine Lösung besitzt.

(c) Gib ein System mit $m = 1$ und $n = 2014$ an, das unlösbar ist.

(d) Wie könnte eine exakte Formulierung der Faustregel lauten? Wann ist ein System von m Gleichungen mit n Unbekannten lösbar und wie berechnet man die Anzahl der freien Parameter?