Aufgabe 68. Invertiere die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{Z}_5$.

Aufgabe 69. Seien A_1, A_2, ..., A_k quadratische $n \times n$-Matrizen über einem Körper $\mathbb{K}$. Zeige, daß das Produkt $A_1 A_2 \dots A_k$ invertierbar ist genau dann, wenn alle A_i invertierbar sind.

Aufgabe 70. (a) Sei A eine invertierbare $n \times n$-Matrix über einem Körper $\mathbb{K}$ und u, v Spaltenvektoren (d.h. $n \times 1$-Matrizen), sodaß gilt $\sigma = 1 + v^t A^{-1} u \neq 0$. Zeige, daß $(A + uv^t)$ invertierbar ist und daß

$$(A + uv^t)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\sigma} A^{-1} u v^t A^{-1}.$$

(b) Wende die Formel an, um die Inversen der Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen.

Aufgabe 71. Wir betrachten die Teilmenge

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

von $\mathbb{C}^{3\times 3}$.

(a) Zeige, daß M einen Unterraum von $\mathbb{C}^{3\times 3}$ bildet und $\{I, E, E^2\}$ eine Basis von M ist, wobei $E = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Zeige, daß für alle $A, B \in M$ gilt $AB \in M$ und $AB = BA$. (d.h., M bildet eine *kommutative Algebra*).

Aufgabe 72. (a) Zeige, daß die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & 2 \\ 0 & -23 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

äquivalent sind.

(b) Bestimme invertierbare Matrizen S und T, sodaß $SAT = B$.