Aufgabe 73. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$, $U \subseteq V$ ein Unterraum. Zeige, daß $\dim(V/U) = \dim V - \dim U$.

Aufgabe 74. (a) Zeige, daß die $n \times n$ oberen Dreiecksmatrizen, das sind die Matrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \dots & * \\ & * & * & \dots & * \\ & & * & \dots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & * \end{pmatrix},$$

eine Teilalgebra der $n \times n$-Matrizen bilden.

(b) Zeige, daß eine obere Dreiecksmatrix genau dann invertierbar ist, wenn alle Hauptdiagonaleinträge von 0 verschieden sind und daß dann die Inverse wieder eine Dreiecksmatrix ist.

(c) Sei A eine obere Dreiecksmatrix mit ganzzahligen Einträgen und es gelte darüberhinaus, daß die Hauptdiagonaleinträge alle gleich 1 sind. Zeige, daß auch die Inverse lauter ganzzahlige Einträge hat.

Aufgabe 75. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $f_1, f_2, \dots, f_m \in \operatorname{Hom}(V, \mathbb{K})$ lineare Abbildungen. Zeige: $f_1, f_2, \dots, f_m$ sind linear unabhängig genau dann, wenn die Abbildung

$$\begin{aligned} F : V &\to \mathbb{K}^m \\ v &\mapsto (f_1(v), f_2(v), \dots, f_m(v)) \end{aligned}$$

surjektiv ist.