Aufgabe 1. A, B und C seien Mengen. Welche der folgenden Schlüsse sind zulässig?

(a) Angenommen, alle Elemente von B sind Element von A, kein Element von C ist Element von B; dann gilt: kein Element von C ist Element von A.

(b) Angenommen, kein Element von B ist Element von A, alle Elemente von C sind Elemente von B; dann gilt: kein Element von C ist Element von A.

Aufgabe 2. Bestimme die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcl} \xi & + & 3\,\eta & + & \zeta & = & 2 \\ \xi & - & 2\,\eta & - & \zeta & = & 1 \\ 4\,\xi & + & 10\,\eta & + & 3\,\zeta & = & 8 \end{array}$$

Aufgabe 3. Bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda & - & \mu & + & 2\,\nu & = & 0 \\ 2\,\lambda & + & \mu & + & 3\,\nu & = & 4 \end{array}$$

Aufgabe 4. Begründe, für welche Werte des Parameters ϑ das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} \chi & + & \vartheta\,\psi & = & 1 \\ (2-\vartheta)\,\chi & + & \psi & = & 1 \end{array}$$

in den Unbekannten χ, ψ lösbar ist und bestimme ggf. die Lösungsmenge.

Aufgabe 5. Von einem Parallelogramm in der Ebene sind die Punkte $(-1, 1)$, $(5, 2)$ und $(4, -2)$ bekannt. Berechne den fehlenden Punkt. Ist die Lösung eindeutig?

Aufgabe 6. Bestimme alle Lösungen der folgenden Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß-Jordanschen Eliminationsverfahrens.

$$(a)\quad \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2\,y & - & 3\,z & = & 5 \\ 4\,x & + & 10\,y & + & 6\,z & = & 2 \\ 5\,x & + & 8\,y & + & 3\,z & = & 7 \\ -x & - & 4\,y & - & 3\,z & = & 1 \end{array} \qquad (b)\quad \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2\,y & - & 3\,z & = & 1 \\ 4\,x & + & 10\,y & + & 6\,z & = & -1 \\ 5\,x & + & 8\,y & + & 3\,z & = & 1 \\ -x & - & 4\,y & - & 3\,z & = & -1 \end{array}$$

Aufgabe 7. Bestimme die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & - & 5\,x_2 & - & 2\,x_3 & - & x_4 & = & -5 \\ 3\,x_1 & + & 11\,x_2 & + & 4\,x_3 & + & x_4 & = & 16 \\ & & 4\,x_2 & + & 2\,x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -2 \end{array}$$

mit Hilfe des Gauß-Jordanschen Eliminationsverfahrens.

Aufgabe 8. Sei Ω eine Grundmenge und sei für Teilmengen A, $B \subseteq \Omega$ die Verknüpfung $A * B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ definiert. Dann gelten für alle Teilmengen A, B, $C \subseteq \Omega$ die folgenden Eigenschaften:

(i) $A * B = B * A$
(ii) $A * (B * C) = (A * B) * C$
(iii) $A * \emptyset = A$
(iv) $A * A = \emptyset$

(a) Beweise die Eigenschaften (i), (iii) und (iv).
(b) Zeige mit Hilfe von (i)–(iv), daß es für gegebene Mengen A, $B \subseteq \Omega$ genau eine Menge X gibt sodaß $A * X = B$.

Aufgabe 9. Ist das Viereck mit den Eckpunkten $(3, 2)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$, $(5, 7)$ ein Trapez?

Aufgabe 10. Gegeben seien die Mengen

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 4\}$$

und

$$B = \{(1, 4, 7) + t(3, 5, 7) : t \in \mathbb{R}\}$$

Bestimme die Schnittmenge $A \cap B$. Was ist die geometrische Interpretation der Mengen A, B und $A \cap B$?

Aufgabe 11. (a) Sei $g = \{(1,-1) + t\,(2,-1) : t \in \mathbb{R}\}$ Bestimme reelle Zahlen a, b, c sodaß $g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a\,x + b\,y = c\}$.

(b) Sei $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 3\}$. Bestimme Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sodaß $E = \{\vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

Sind die Lösungen eindeutig?

Aufgabe 12. Stelle fest, ob die folgenden Operationen kommutativ/assoziativ sind. Welche Paare $(X, \circ)$ bilden Gruppen? Bestimme ggf. neutrale und inverse Elemente.

(a) $X = \mathbb{R}$, $x \circ y = \max(x,y)$

(b) $X = \mathbb{R}$, $x \circ y = x + y + 1$

(c) $X = \mathbb{R}$, $x \circ y = x + y + xy$

Aufgabe 13. Zeichne die folgenden Teilmengen der komplexen Ebene $\mathbb{C}$:

(a) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - i| < 2\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z^2) < 4\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} : |\bar{z} - i| = \mathrm{Re}(z)\}$

Aufgabe 14. (a) Zeige, daß für $a, b \in \mathbb{C}$ gilt $|ab| = |a|\,|b|$.

(b) Folgerung: die Menge $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ist (mit der Multiplikation als Gruppenoperation) eine Gruppe. Bestimme das neutrale Element und zu gegebenem $z \in \mathbb{T}$ das inverse Element.

(c) Sei $z_0 \in \mathbb{T}$. Zeige: (i) Die Menge $\{z_0^n : n \in \mathbb{Z}\}$ bildet eine Gruppe bezüglich der Multiplikation. (ii) Die Gruppe ist endlich genau dann, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt sodaß $z_0^N = 1$.

Aufgabe 15. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl}
(-2+i)\,x & - & 2\,y & - & z & = & -2+i \\
(3+i)\,x & + & (9-i)\,y & + & 3\,z & = & 6 \\
x & + & 3\,y & + & z & = & 2
\end{array}$$

über den komplexen Zahlen mit Hilfe des Gauß-Jordanschen Eliminationsverfahrens.

Aufgabe 16. Zeige: Die Menge aller Zahlen $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ bildet bezüglich der üblichen Addition und Multiplikation einen Körper.

Aufgabe 17. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} 4\,x & + & y & + & 4\,z & = & 3 \\ 4\,x & & & + & 3\,z & = & 3 \\ x & + & 3\,y & + & z & = & 0 \end{array}$$

über dem Körper $\mathbb{Z}_5$.

Aufgabe 18. Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit den Operationen

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', 0)$$
$$\lambda \odot (x, y) = (\lambda x, 0)$$

Welche Vektorraumaxiome sind erfüllt?

Aufgabe 19. Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Zeige:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}\, \forall a \in V : \lambda a = 0 \implies (\lambda = 0 \vee a = 0)$$

Aufgabe 20. Welche der folgenden Mengen (mit den üblichen Operationen $+$ und $\cdot$) bilden Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$?

(a) $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$
(b) $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 1\}$
(c) $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 2\,x_2\}$
(d) $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n\}$

Aufgabe 21. Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des Vektorraums $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

(a) $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(0) = 1\}$
(b) $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(0) + f(1) = 2\}$
(c) $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : f(0) + f(1) = f(2)\}$
(d) $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : \exists C > 0 \text{ sodaß } f(x) = 0 \text{ für alle } x \text{ mit } |x| > C\}$

Aufgabe 22. Bestimme alle Unterräume des Vektorraums $(\mathbb{Z}_2)^2$.

Aufgabe 23. Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, $v \in V$, $U \subseteq V$ ein Unterraum und $L = v + U$ eine lineare Mannigfaltigkeit. Zeige, daß für alle Vektoren $w \in V$ gilt:

$$w \in L \iff L = w + U.$$

Aufgabe 24. Bestimme im $\mathbb{R}^2$ die linearen Hüllen der Mengen

$$(a) \quad \{(1,0)\} \qquad (b) \quad \{(1+t,t) : t \in \mathbb{R}\} \qquad (c) \quad \{(0,t) : t \in \mathbb{R}\}$$

Aufgabe 25. Drücke den Vektor $(2,1,0) \in (\mathbb{Z}_5)^3$ als Linearkombination der Vektoren $a = (1,1,0)$, $b = (0,1,3)$ und $c = (3,0,3)$ aus.

Aufgabe 26. Welche der folgenden Mengen sind linear unabhängig?

(a) im $\mathbb{R}^4$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) im $(\mathbb{Z}_5)^4$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 27. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $a, b, c \in V$ drei linear unabhängige Vektoren. Untersuche, ob die Mengen

$$\{a+b, b+c, c+a\}, \{a-b, c-b, c-a\}, \{a, a-b, a+b-c\}$$

linear unabhängig sind.

Aufgabe 27* (Fleißaufgabe)
Wie sieht es aus, wenn V ein Vektorraum über (a) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ (b) $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$ ist?

Aufgabe 28. Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge linear unabhängiger Teilmengen $A_i \subseteq V$, sodaß $A_i \subseteq A_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.
Zeige, daß auch die Menge $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 29. Sei $V = \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der reellen Polynome. Untersuche, ob die Polynome

$$p_1 = (x-1)(x-2) \qquad p_2 = (x-2)(x-3) \qquad p_2 = (x-1)(x-3)$$

linear unabhängig sind.

Aufgabe 30. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ und $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ jeweils linear unabhängige Mengen. Seien $U = \mathcal{L}(\{u_1, u_2, \dots, u_m\})$ und $W = \mathcal{L}(\{w_1, w_2, \dots, w_n\})$ die linearen Hüllen.
Zeige: Die Vereinigungsmenge $\{u_1, u_2, \dots, u_m, w_1, w_2, \dots, w_n\}$ ist linear unabhängig genau dann, wenn $U \cap W = \{0\}$.

Aufgabe 31. Gegeben seien die Unterräume

$$U_1 = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix}-2\\12\\-6\\-5\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-16\\4\\-2\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-9\\8\\-4\\-2\\-1\end{pmatrix}\right\}\right) \qquad U_2 = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix}-6\\-3\\0\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-10\\7\\-2\\-2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\11\\-1\\-6\\-4\end{pmatrix}\right\}\right)$$

des $\mathbb{R}^5$. Bestimme jeweils eine Basis von (a) $U_1 \cap U_2$ und (b) $U_1 + U_2$.

Aufgabe 32. Sei U der Unterraum von $(\mathbb{Z}_3)^4$, der von den Vektoren

$$\{[2,\ 0,\ 0,\ 1],\ [1,\ 0,\ 0,\ 2],\ [1,\ 0,\ 2,\ 1],\ [2,\ 0,\ 2,\ 0],\ [1,\ 0,\ 1,\ 0]\}$$

aufgespannt wird.

(a) Bestimme eine Basis von U.
(b) Erweitere die Basis zu einer Basis von $(\mathbb{Z}_3)^4$.

Aufgabe 33. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit Basis $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ und seien $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ Vektoren mit eindeutigen Darstellungen $v_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} b_j$. Zeige: $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ ist linear unabhängig genau dann, wenn die Menge der Koordinatenvektoren

$$\{(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1n}), (\lambda_{21}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2n}), \dots, (\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{kn})\}$$

linear unabhängig in $\mathbb{K}^n$ ist.

Aufgabe 34. Sei $V = \mathbb{R}^4$ und

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Zeige, daß V von M_1 erzeugt wird und daß M_2 linear unabhängig ist, und ergänze M_2 durch Hinzunahme von Elementen aus M_1 zu einer Basis von V.

Aufgabe 35. Sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ der Vektorraum aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zeige, daß

$$U_+ = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}\} \qquad U_- = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = -f(-x)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

jeweils Unterräume von V sind und daß $V = U_+ \oplus U_-$ (direkte Summe).

Aufgabe 36. Seien W_1 und W_2 Unterräume eines Vektorraums V. Zeige: $W_1 \cup W_2$ ist ein Unterraum genau dann, wenn entweder gilt $W_1 \subseteq W_2$ oder $W_2 \subseteq W_1$.

Aufgabe 37. Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und $U_1, U_2, U_3 \subseteq V$ drei Unterräume. Zeige, daß

$$(U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3) \subseteq U_1 \cap (U_2 + U_3).$$

Zeige weiters durch Angabe eines Gegenbeispiels, daß Gleichheit im Allgemeinen nicht erfüllt ist.

Aufgabe 38. Sei V ein Vektorraum der Dimension n and seien U und W zwei verschiedene Unterräume der Dimension $n-1$. Zeige, daß $\dim(U \cap W) = n-2$.

Aufgabe 39. Gib drei Untervektorräume U, V und W des $\mathbb{R}^3$ an, sodaß zwar $U \cap V = \{0\}$, $V \cap W = \{0\}$ und $U \cap W = \{0\}$, aber $U + V + W$ keine direkte Summe ist.

Aufgabe 40. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Eine *aufsteigende Unterraumkette der Länge* r ist eine Folge $(U_0, U_1, \ldots, U_r)$ von Unterräumen $U_i \subseteq V$ sodaß $U_i \subsetneq U_{i+1}$. Zeige

(a) Für jede Unterraumkette $(U_0, U_1, \ldots, U_r)$ gilt $r \leq \dim V$.

(b) Es existiert eine maximale Unterraumkette der Länge $r = \dim V$. Ist diese eindeutig?

Aufgabe 41. Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $A \subseteq V$ eine Teilmenge (nicht unbedingt endlich), sodaß $V = L(A)$. Zeige, daß man eine endliche Teilmenge $B \subseteq A$ finden kann, die eine Basis von V bildet.
Hinweis: Bestimme zunächst eine endliche Teilmenge von A, die den Vektorraum erzeugt.

Aufgabe 42. Bestimme den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 1 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ durch (a) Zeilenumformungen (b) Spaltenumformungen und bestimme jeweils eine Basis des Zeilenraums und des Spaltenraums.

Aufgabe 43. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

$$(a) \quad f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \big(x_1 + x_2 + x_1 x_2 \big)$$

Aufgabe 44. Welche der folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ sind linear?

$(a) \quad f_1(p)(x) = p(x) - 1$ $\qquad (b) \quad f_2(p)(x) = p(x) - x\,p(1)$

$(c) \quad f_3(p)(x) = x^2 p(2x)$ $\qquad (d) \quad f_4(p)(x) = 2\,p(x^2)$

Aufgabe 45. Sei $V = U_1 \oplus U_2$ eine direkte Summe, sodaß jedes $v \in V$ eine eindeutige Zerlegung $v = u_1 + u_2$ mit $u_i \in U_i$ hat. Zeige, daß die Abbildung $P_1 : V \to U_1, v \mapsto u_1$ linear ist.

Aufgabe 46. Seien V und W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$ und $A \subseteq V$ eine Teilmenge mit $V = \mathcal{L}(A)$. Zeige, daß zwei lineare Abbildungen $f, g : V \to W$ genau dann übereinstimmen, wenn $f(a) = g(a)$ für alle $a \in A$.

Aufgabe 47. Zeige, daß es genau eine lineare Abbildung von $f : (\mathbb{Z}_5)^3 \to \mathbb{Z}_5$ mit den Werten

$$f((1,1,1)) = 1, \qquad f((1,1,4)) = 1, \qquad f((0,1,1)) = 1$$

gibt und bestimme a, b, $c \in \mathbb{Z}_5$ so, daß $f((x,y,z)) = ax + by + cz$ für alle x, y, $z \in \mathbb{Z}_5$ gilt.

Aufgabe 48. Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Bestimme alle linearen Abbildungen $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $F(v_j) = w_j$ für $j \in \{1,2,3\}$ sowie deren Matrixdarstellung bezüglich der Standardbasen in $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 49. Sei $\mathbb{R}[x]_3$ der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 über $\mathbb{R}$. Bestimme die Matrixdarstellung der linearen Abbildung

$$\begin{aligned} Q : \mathbb{R}[x]_2 &\to \mathbb{R}[x]_3 \\ p(x) &\mapsto x \cdot p(x) \end{aligned}$$

bezüglich der Basen (T_0, T_1, T_2) für $\mathbb{R}[x]_2$ und (T_0, T_1, T_2, T_3) für $\mathbb{R}[x]_3$, wobei

$$T_0(x) = 1 \qquad T_1(x) = x \qquad T_2(x) = 2x^2 - 1 \qquad T_3(x) = 4x^3 - 3x.$$

Aufgabe 50. Seien U, V, W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$ und seien $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen. Zeige, daß $g \circ f : U \to W$ ebenfalls linear ist.

Aufgabe 51. Seien V, W Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Seien weiters v_1, v_2, $\ldots$, $v_n \in V$. Zeige: Wenn $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$ linear unabhängig ist, dann auch $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.
Wann gilt auch der umgekehrte Schluß?

Aufgabe 52. Wir betrachten Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeige oder widerlege:

(a) Wenn A eine Diagonalmatrix ist und B beliebig, dann ist $AB = BA$.
(b) Wenn $A, B \neq 0$ (Nullmatrix) $\implies AB \neq 0$.
(c) $AB = 0 \implies BA = 0$.
(d) $AB + BA = 0 \implies A^2B^3 = B^3A^2$.

Aufgabe 53. Die Potenzen einer Matrix sind definiert durch $A^0 = I$ sowie $A^n = A \cdot A^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Berechne

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
Hinweis: Zunächst $n = 1, 2, 3$ ausrechnen, die Lösung erraten und durch Induktion beweisen.

Aufgabe 54. Zeige oder widerlege: Für jede komplexe 2×2-Matrix A gibt es eine 2×2-Matrix B, sodaß $A = B^2$ ist.

Aufgabe 55. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f : V \to V$ linear. Zeige:

(a) $\ker(f) \subseteq \ker(f^2) \subseteq \ker(f^3) \subseteq \cdots \subseteq \ker(f^n) \subseteq \cdots$
(b) Ist $\dim V < \infty$, dann existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ sodaß $\ker(f^n) = \ker(f^{n_0})$ für alle $n \geq n_0$ und $\ker(f^n) \subsetneq \ker(f^{n+1})$ für alle $n < n_0$.

Aufgabe 56. (a) Seien U, V, W endlichdimensionale Vektorräume und $f : U \to V$, $g : V \to W$ lineare Abbildungen. Zeige, dass $\operatorname{rank} g \circ f \leq \min\{\operatorname{rank} g, \operatorname{rank} f\}$.
(b) Gegeben $m, n \in \mathbb{N}$ und $r \leq \min(m, n)$, finde lineare Abbildungen f und g, sodaß $\operatorname{rank} f = m$, $\operatorname{rank} g = n$ und $\operatorname{rank} g \circ f = r$.

Aufgabe 57. Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume und $U \subseteq V$ ein Unterraum. Zeige: es existiert ein Homomorphismus $f : V \to W$ mit $\ker f = U$ genau dann, wenn $\dim U \geq \dim V - \dim W$.

Aufgabe 58. Sei V ein Vektorraum $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Sei $v \in V$ ein Vektor mit der Eigenschaft, daß $f^{n-1}(v) \neq 0$ ist aber $f^n(v) = 0$. Zeige, daß $\{v, f(v), f^2(v), \dots, f^{n-1}(v)\}$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 59. Bestimme jeweils eine Basis von Kern und Bild der linearen Abbildung

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^{2\times 2} &\to \mathbb{R}^2 \\ A &\mapsto Av \end{aligned}$$

wobei $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$.

Aufgabe 60. Gegeben seien die linearen Abbildungen $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f : (x_1, x_2) \mapsto (x_1+x_2, x_1-x_2)$ $\quad$ $g : (x_1, x_2) \mapsto (x_1+x_2, x_1+x_2)$ $\quad$ $h : (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1)$

Zeige, daß die Menge $\{f, g, h\}$ linear unabhängig ist, wenn man sie als Teilmenge des Vektorraums[1] $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ auffaßt.

Aufgabe 61. Sei V ein Vektorraum und $f : V \to V$ eine *nilpotente* lineare Abbildung, d.h., es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, sodaß $f^k = 0$.

(a) Zeige, daß $\mathrm{id}_V - f$ invertierbar ist mit $(\mathrm{id}_V - f)^{-1} = \mathrm{id}_V + f + f^2 + \cdots + f^{k-1}$

(b) Verwende (a), um die die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen.

Aufgabe 62. Bestimme eine Permutationsmatrix P, sowie je eine linke und eine rechte Dreiecksmatrix L und R, sodaß $A = PLR$ für

$$\text{(a)} \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 10 & 7 & 6 \\ 15 & 0 & -10 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

[1] In der Vorlesung mit $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ bezeichnet.

Aufgabe 63. Bestimme diejenigen Werte von α, für die das lineare reelle Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & y & - & z & = & -1 \\ 2x & + & 3y & + & \alpha z & = & -2\alpha+3 \\ x & + & \alpha y & + & z & = & 1 \end{array}$$

(a) keine Lösung (b) genau eine Lösung (c) unendlich viele Lösungen hat und gib jeweils die Lösungsmenge an.

Aufgabe 64. Für welche Werte von a ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a & 4 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{Z}_5$ invertierbar?

Aufgabe 65. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, und V^* der Dualraum. Zeige:
$E \subseteq V$ ist ein Erzeugendensystem genau dann, wenn gilt:

$$\forall w^* \in V^* : \big[(\forall v \in E : \langle w^*, v\rangle = 0) \implies w^* = 0\big]$$

Aufgabe 66. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum.

(a) Zeige, daß durch $u \sim v \iff u - v \in U$ eine Äquivalenzrelation auf V erklärt wird, wobei die Äquivalenzklasse $[v]$ eines Elements $v \in V$ genau durch die lineare Mannitfaltigkeit $v + U$ gegeben ist.

(b) Zeige, daß die Menge der Äquivalenzklassen $V/U = \{[v] : v \in V\}$ mit den Operationen

$$\begin{aligned} + : V/U \times V/U &\to V/U & \qquad \cdot : \mathbb{K} \times V/U &\to V/U \\ [u] + [v] &:= [u + v] & \lambda \cdot [v] &:= [\lambda v] \end{aligned}$$

einen Vektorraum bildet.

(c) Sei $f : V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung und $U = \ker f$. Zeige, daß durch $\tilde{f}([v]) = f(v)$ ein Isormorphismus $\tilde{f} : V/U \to W$ definiert wird.

Aufgabe 67. Es sei ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{K}_{m\times n}$ und $b \in \mathbb{K}^m$ gegeben. Die Faustregel

Anzahl der freien Parameter = Anzahl der Unbekannten - Anzahl der Gleichungen

trifft nicht immer zu:

(a) Gib ein Beispiel eines Gleichungssystems mit drei Gleichungen in zwei Unbekannten an, das genau eine Lösung besitzt.

(b) Gib ein Beispiel eines Gleichungssystems mit drei Gleichungen in drei Unbekannten an, das keine Lösung besitzt.

(c) Gib ein System mit $m = 1$ und $n = 2014$ an, das unlösbar ist.

(d) Wie könnte eine exakte Formulierung der Faustregel lauten? Wann ist ein System von m Gleichungen mit n Unbekannten lösbar und wie berechnet man die Anzahl der freien Parameter?

Aufgabe 68. Invertiere die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{Z}_5$.

Aufgabe 69. Seien A_1, A_2, ..., A_k quadratische $n \times n$-Matrizen über einem Körper $\mathbb{K}$. Zeige, daß das Produkt $A_1 A_2 \dots A_k$ invertierbar ist genau dann, wenn alle A_i invertierbar sind.

Aufgabe 70. (a) Sei A eine invertierbare $n \times n$-Matrix über einem Körper $\mathbb{K}$ und u, v Spaltenvektoren (d.h. $n \times 1$-Matrizen), sodaß gilt $\sigma = 1 + v^t A^{-1} u \neq 0$. Zeige, daß $(A + uv^t)$ invertierbar ist und daß

$$(A + uv^t)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\sigma} A^{-1} u v^t A^{-1}.$$

(b) Wende die Formel an, um die Inversen der Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen.

Aufgabe 71. Wir betrachten die Teilmenge

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C} \right\}$$

von $\mathbb{C}^{3\times 3}$.

(a) Zeige, daß M einen Unterraum von $\mathbb{C}^{3\times 3}$ bildet und $\{I, E, E^2\}$ eine Basis von M ist, wobei $E = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Zeige, daß für alle $A, B \in M$ gilt $AB \in M$ und $AB = BA$. (d.h., M bildet eine *kommutative Algebra*).

Aufgabe 72. (a) Zeige, daß die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & 2 \\ 0 & -23 & 1 & -6 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

äquivalent sind.

(b) Bestimme invertierbare Matrizen S und T, sodaß $SAT = B$.

Aufgabe 73. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$, $U \subseteq V$ ein Unterraum. Zeige, daß $\dim(V/U) = \dim V - \dim U$.

Aufgabe 74. (a) Zeige, daß die $n \times n$ oberen Dreiecksmatrizen, das sind die Matrizen der Gestalt

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \dots & * \\ & * & * & \dots & * \\ & & * & \dots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & * \end{pmatrix},$$

eine Teilalgebra der $n \times n$-Matrizen bilden.

(b) Zeige, daß eine obere Dreiecksmatrix genau dann invertierbar ist, wenn alle Hauptdiagonaleinträge von 0 verschieden sind und daß dann die Inverse wieder eine Dreiecksmatrix ist.

(c) Sei A eine obere Dreiecksmatrix mit ganzzahligen Einträgen und es gelte darüberhinaus, daß die Hauptdiagonaleinträge alle gleich 1 sind. Zeige, daß auch die Inverse lauter ganzzahlige Einträge hat.

Aufgabe 75. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $f_1, f_2, \dots, f_m \in \operatorname{Hom}(V, \mathbb{K})$ lineare Abbildungen. Zeige: $f_1, f_2, \dots, f_m$ sind linear unabhängig genau dann, wenn die Abbildung

$$\begin{aligned} F : V &\to \mathbb{K}^m \\ v &\mapsto (f_1(v), f_2(v), \dots, f_m(v)) \end{aligned}$$

surjektiv ist.