Aufgabe 1. Welche der folgenden Abbildungen sind Sesquilinearformen oder Bilinearformen? Welche davon sind Skalarprodukte?
(a) $B_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$
(b) $B_2 : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto x\overline{y} + 1$
(c) $B_3 : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto \overline{xy}$
(d) $B_4 : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$, $(p, q) \mapsto (p \cdot q)'(0)$ (Ableitung).

Aufgabe 2. Sei $V = \mathbb{R}[x]_2$ der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad ≤ 2.
(a) Zeige, daß durch

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}[x]_2$ definiert wird.
(b) Berechne die Grammatrix $(a_{ij})_{i,j=0,1,2}$ wobei $a_{ij} = \langle x^i, x^j \rangle$.

Aufgabe 3. Zeige, daß für beliebiges fixiertes $N \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$B_N(x, y) = \sum_{i,j=0}^{n} \frac{x_i y_j}{i + j + N}$$

eine positiv definite Bilinearform auf $\mathbb{R}^{n+1} = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ darstellt.
Hinweis: Um Positivität zu zeigen, vgl. mit Aufgabe 2.

Aufgabe 4. Ist

$$\begin{aligned} \max : \mathbb{C}^2 &\to \mathbb{C} \\ (x_1, x_2) &\mapsto \max(|x_1|, |x_2|) \end{aligned}$$

eine Norm? Gibt es ein inneres Produkt auf $\mathbb{C}^2$, sodaß max die davon induzierte Norm ist?

Aufgabe 5. Bestimme mit dem Gram-Schmidtschen Verfahren eine Orthonormalbasis der linearen Hülle

$$\mathcal{L}(\{(1, 0, 2, 0, 0), (1, 1, 2, 0, 2), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 3, 2, 3)\})$$

im $\mathbb{R}^5$.

Aufgabe 6. Bestimme eine Orthonormalbasis des Raumes V aus Aufgabe 2.