Graz University of Technology

WS2010/2011

Franz Lehner
02.11.2010

Department of Mathematical Structure Theory

Übungen Höhere Analysis - Blatt №2

Fleißaufgabe. Konstruiere eine überabzählbare Kette in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, d.h., eine Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Teilmengen von $\mathbb{N}$, sodaß

(a) I eine überabzählbare linear geordnete Menge ist
(b) $i < i \implies A_i \subsetneq A_j$

Übung 10.
Zeige, daß die Menge aller positiven reellen Zahlen $x \in]0,1[$, die an irgendeiner Dezimalstelle eine 2 aufweisen, eine Borelmenge ist. Um Eindeutigkeit zu erreichen, sind dabei nur Dezimaldarstellungen zugelassen, die nicht in 9 periodisch enden, d.h., anstatt $0.x_1x_2\cdots x_n999\cdots$ wird $0.x_1x_2\cdots x_n1$ geschrieben.

Übung 11.
Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine Borelmenge und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige mit dem Prinzip der guten Mengen, daß auch $\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$ eine Borelmenge ist.

Übung 12.
Sei X überabzählbar und

$$\mathcal{M} = \{E \subseteq X \mid E \text{ abzählbar oder } X \setminus E \text{ abzählbar }\}$$

die σ-Algebra aus Übung 4. Zeige, daß die Abbildung $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } E \text{ abzählbar} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Maßeigenschaften erfüllt.

Übung 13.
Sei X eine Menge, $\mathcal{R}$ ein Ring auf $\mathcal{P}(X)$ und $\mu : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ ein Inhalt mit $\mu(X) < \infty$. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:

1. μ ist von oben stetig bei $\emptyset$: Wenn $A_n \searrow \emptyset$, dann gilt $\lim \mu(A_n) = 0$.
2. μ ist σ-additiv: sei $E_n \in \mathcal{R}$ eine disjunkte Folge mit $E = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{R}$, dann ist $\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

Übung 14.
Betrachte die natürlichen Zahlen mit der Mengenfunktion

$$\mu(A) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \#(A \cap [1, N])$$

für Mengen $A \subset \mathbb{N}$, für die der Grenzwert existiert.

(a) Zeige, dass diese Mengenfunktion additiv aber nicht σ-additiv ist.
(b) Bestimme eine Menge $A \subseteq \mathbb{N}$, sodass $\mu(A)$ nicht existiert.

Definition. Ein *Filter* auf eine Menge X ist eine Teilmenge $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit den Eigenschaften

(i) $\emptyset \notin \mathfrak{F}$

(ii) $A \in \mathfrak{F},\, A \subseteq B \implies B \in \mathfrak{F}$

(iii) $A, B \in \mathfrak{F} \implies A \cap B \in \mathfrak{F}$

Wenn zusätzlich gilt

(iv) $\forall A \subseteq X : A \in \mathfrak{F} \vee A^c \in \mathfrak{F}$

dann heißt $\mathfrak{F}$ *Ultrafilter.*

Zum Beispiel ist der von einer fixen Menge $A_0 \subseteq X$ *erzeugte Filter*

$$\mathfrak{F}_{A_0} = \{B \subseteq X : A_0 \subseteq B\}$$

ein Ultrafilter. Das sind aber nicht die einzigen Ultrafilter: Aus dem Auswahlaxiom folgt (und ist sogar äquivalent dazu), daß jeder Filter zu einem Ultrafilter ergänzt werden kann.

Übung 15.
Sei $\mu : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}_0^+$ ein Inhalt mit den Eigenschaften $\mu(X) = 1$ und $\mu(A) \in \{0, 1\}$ $\forall A \subseteq X$. Zeige, daß

$$\{A \subseteq X : \mu(A) = 1\}$$

ein Ultrafilter ist.

Übung 16.
Zeige, daß es kein Maß μ auf $\mathcal{P}([0, 1])$ gibt mit den Eigenschaften

(a) $\mu([0, 1]) = 1$.

(b) $\mu(\{x\}) = 0 \;\forall x \in [0, 1]$.

(c) $\mu(A) \in \{0, 1\} \;\forall A \subseteq [0, 1]$.

Definition. Ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt *σ-endlich*, wenn $\exists (E_n) \subseteq \mathcal{A}$ mit $\mu(E_n) < \infty$ und $X = \bigcup_n E_n$.

Übung 17.
Zeige, daß in einem σ-endlichen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ die Menge $\{x : \mu(\{x\}) > 0\}$ höchstens abzählbar sein kann.