Graz University of Technology

WS2010/2011

Franz Lehner
16.11.2010

Department of Mathematical Structure Theory

Übungen Höhere Analysis - Blatt №3

Übung 18.
Welche der folgenden Mengenfunktionen $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sind äußere Maße? Bestimme ggf. die σ-Algebra der meßbaren Mengen.

(a) $\mu(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \#(A \cap \{1, \cdots, n\})$

(b) $\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{für } A = \emptyset \\ 1 & \text{für } A \neq \emptyset \end{cases}$

(c) $\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{für } |A| < \infty \\ 1 & \text{für } |A| = \infty \end{cases}$

(d) $\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{für } |A| \leq \aleph_0 \\ 1 & \text{für } |A| > \aleph_0 \end{cases}$

Übung 19.
Auf $[0,1]^2$ ist durch $\mu([0,1]\times[a,b]) = b-a$ und $\mu([a,b]\times[0,1]) = b-a$ eine Mengenfunktion gegeben. Finde mindestens zwei verschiedene Fortsetzungen von μ zu einem Maß auf $\mathcal{B}([0,1]^2)$.

Übung 20.
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch $f(x,y) = \min(x,y)$ gegeben. Zeige, daß durch

$$\mu([a,b) \times [c,d)) = f(b,d) - f(b,c) - f(a,d) + f(a,c)$$

ein Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ gegeben ist. Berechne

$$\mu\left(\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}\right).$$

Übung 21.
Seien $0 < p \leq 1/2$ und $A_0 = [0,1]$. Bilde A_1 durch Herausnehmen des offenen Mittelstückes der Länge p aus A_0. Ist A_n gegeben (eine Vereinigung von 2^n disjunkten, abgeschlossenen Intervallen, so ergibt sich A_{n+1} durch Herausnehmen der offenen Mittelstücke der Längen $\frac{p^{n+1}}{2^n}$ aus jedem Intervall von A_n. Im Limes erhält man eine Menge A.

(a) Ist A abzählbar oder überabzählbar?
(b) Enthält A ein offenes Intervall?
(c) Berechne das Lebesguemaß $\lambda(A)$.

Übung 22.
Sei dim die Hausdorffdimension auf einem metrischen Raum (X,d) und $A, B \subseteq X$ Borelmengen. Zeige:

(a) $A \subseteq B \implies \dim A \leq \dim B$
(b) $\dim(A \cup B) = \max\{\dim A, \dim B\}$
(c) Zeige, daß für $s < n$ das Hausdorffmaß $\mathcal{H}^2$ auf $\mathbb{R}^n$ nicht σ-endlich ist.

Übung 23.
Zeige, daß die Hausdorffdimension $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ ist.
Hinweis: Bestimme zunächst die Hausdorffdimension des Einheitsquadrats.

Übung 24.
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge mit nichtleerem Innerem. Zeige, daß $\dim A = n$ ist.

Übung 25.
Bestimme eine obere Schranke für die Hausdorffdimension der zweidimensionalen Cantormenge: