

Übungen Höhere Analysis - Blatt №4

Übung 26.

Sei (X, \mathcal{A}) ein Maßraum und $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion.

Zeige: Wenn f meßbar ist, dann ist sowohl $f^+ = \max(f, 0)$ als auch $f^- = -\min(f, 0)$ meßbar.

Gilt auch die Umkehrung?

Übung 27.

Seien (X, \mathcal{A}_1, μ) , (Y, \mathcal{A}_2, ν) Maßräume mit den Vervollständigungen $(X, \overline{\mathcal{A}}_1, \overline{\mu})$ und $(Y, \overline{\mathcal{A}}_2, \overline{\nu})$. Weiters sei $f : (X, \mathcal{A}_1) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_2)$ meßbar und es gelte für jede ν -Nullmenge $C \in \mathcal{A}_2$ $\mu(f^{-1}(C)) = 0$. Zeige: Die Abbildung $f : (X, \overline{\mathcal{A}}_1) \rightarrow (Y, \overline{\mathcal{A}}_2)$ ist meßbar. Ist insbesondere $\nu = f(\mu)$ so ist $f : (X, \overline{\mathcal{A}}_1) \rightarrow (Y, \overline{\mathcal{A}}_2)$ meßbar und $\overline{\nu} = f(\overline{\mu})$.

Übung 28.

(a) Zeige, dass jede monotone Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Borel-meßbar ist.

(b) Zeige, dass $\frac{df}{dx}$ Borel-meßbar ist, wenn $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Übung 29.

Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und $f : X \rightarrow [0, \infty]$ eine meßbare Funktion. Zeige:

(a) f ist genau dann μ -integrierbar, wenn

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^n \mu(\{x \in X \mid 2^n < f(x) \leq 2^{n+1}\})$$

konvergiert.

(b) Wenn $\mu(X) < \infty$ gilt, dann ist f genau dann integrierbar, wenn

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\{x \in X \mid f(x) > n\})$$

konvergiert. Was kann schiefgehen, wenn $\mu(X) = \infty$?

Übung 30.

Zeige, daß die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ irrational} \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \text{ (gekürzter Bruch mit } p \in \mathbb{Z} \text{ und } q \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

meßbar ist.

Übung 31.

Seine $a_{ij} \geq 0$ für $i, j \in \mathbb{N}$. Zeige, daß

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$$

Übung 32.

Sei $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$ der in Ü 18.d bestimmte Maßraum (konstruiert aus $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ mit dem äußeren Maß $\mu^*(\mathcal{A}) = 1$ wenn $|A| > \aleph_0$ und $\mu^*(A) = 0$ sonst).

- (a) Welche Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind meßbar?
- (b) Welche Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind integrierbar?
- (c) Bestimme für diese f das Integral $\int f d\mu$.

Übung 33.

Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt $f > 0$ f.ü. $\iff \int_A f d\mu > 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) > 0$.