⑧ Zur Linearität des bestimmten Integrals

Seien $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbare Funktionen

Haben bereits gesehen: Dann ist $f+g$ auch integrierbar in $[a,b]$

Noch zu zeigen: $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

Zur Erinnerung: Es gilt für jede Zerlegung Z von $[a,b]$:

$$U(f,Z) + U(g,Z) \leq U(f+g, Z)$$

$$\& \quad O(f,Z) + O(g,Z) \geq O(f+g, Z)$$

Sei $\varepsilon > 0$.

Da f, g integrierbar, existiert eine Zerlegung Z' von $[a,b]$ mit

$$O(f, Z') - U(\cancel{f}f, Z') < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\& \quad O(\cancel{f}g, Z') - U(g, Z') < \frac{\varepsilon}{2}$$

Nun: 1)

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\leq} + \underbrace{\int_a^b g(x)\,dx}_{\leq} - \underbrace{\int_a^b (f+g)(x)\,dx}_{\geq}$$

$$\leq O(f, Z') + O(g, Z') - U(f+g, Z')$$

$$\leq O(f, Z') + O(g, Z') - U(f, Z') - U(g, Z')$$

$$= \underbrace{\left(O(f, Z') - U(f, Z')\right)}_{\lneq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\left(O(g, Z') - U(g, Z')\right)}_{\lneq \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

2)

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b (f+g)(x)\,dx$$

$$\geq U(f, Z') + U(g, Z') - O(f+g, Z')$$

$$\geq U(f, Z') + U(g, Z') - O(f, Z') - O(g, Z')$$

$$= \underbrace{-\left(O(f, Z') - U(f, Z')\right)}_{> -\frac{\varepsilon}{2}} \underbrace{- \left(O(g, Z') - U(g, Z')\right)}_{> -\frac{\varepsilon}{2}} > -\varepsilon$$

Also: $\left| \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b (f+g)(x)\,dx \right| < \varepsilon$ für jedes beliebig kleine ε

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f+g)(x)\,dx$$