

# Folie zur Vorlesung “Mathematik B”

22. März 2011

## Berechnung von Typ-4-Brüchen:

Seien  $B, C, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k \geq 2$ . Man berechne das Integral

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + \beta x + \gamma)^k} dx \quad \text{mit } \beta^2 - 4\gamma < 0,$$

d.h. das Polynom  $x^2 + \beta x + \gamma$  besitzt keine reellen Nullstellen. Wir berechnen das gesuchte Integral in 5 Schritten:

1. Berechne

$$\int \frac{y}{(y^2 + 1)^k} dy.$$

Wir verwenden folgende Substitution:

$$w = y^2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dw}{dy} = 2y \quad \Longrightarrow \quad dy = \frac{dw}{2y}.$$

Also:

$$\begin{aligned} \int \frac{y}{(y^2 + 1)^k} dy &= \int \frac{y}{w^k} \frac{dw}{2y} = \frac{1}{2} \int \frac{dw}{w^k} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{-k+1} \frac{1}{w^{k-1}} + c \\ &= -\frac{1}{2(k-1)} \frac{1}{(y^2 + 1)^{k-1}} + c. \end{aligned}$$

2. Man bestimme eine rekursive Formel für das Integral

$$\mathcal{I}_k(y) := \int \frac{dy}{(y^2 + 1)^k}.$$

Für  $k = 1$ :

$$\mathcal{I}_1(y) = \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \arctan(y) + c.$$

Sei nun  $k \geq 2$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_k(y) &= \int \frac{dy}{(y^2 + 1)^k} = \int \frac{y^2 + 1 - y^2}{(y^2 + 1)^k} dy \\ &= \int \frac{y^2 + 1}{(y^2 + 1)^k} dy - \int \frac{y^2}{(y^2 + 1)^k} dy \\ &= \underbrace{\int \frac{1}{(y^2 + 1)^{k-1}} dy}_{=\mathcal{I}_{k-1}(y)} - \int \frac{y^2}{(y^2 + 1)^k} dy = \dots \end{aligned}$$

Wir wenden partielle Integration auf das zweite Integral an mit

$$f(y) = y, g'(y) = \frac{y}{(y^2 + 1)^k} \implies f'(y) = 1, g(y) = -\frac{1}{2(k-1)} \frac{1}{(y^2 + 1)^{k-1}}.$$

Es ergibt sich also:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_k(y) &= \mathcal{I}_{k-1}(y) - \int \underbrace{y}_{=f(y)} \cdot \underbrace{\frac{y}{(y^2 + 1)^k}}_{=g'(y)} dy \\ &= \mathcal{I}_{k-1}(y) - \left[ -\frac{1}{2(k-1)} \frac{y}{(y^2 + 1)^{k-1}} - \int -\frac{1}{2(k-1)} \frac{1}{(y^2 + 1)^{k-1}} dy \right] \\ &= \mathcal{I}_{k-1}(y) - \left[ -\frac{1}{2(k-1)} \frac{y}{(y^2 + 1)^{k-1}} + \frac{1}{2(k-1)} \underbrace{\int \frac{1}{(y^2 + 1)^{k-1}} dy}_{=\mathcal{I}_{k-1}(y)} \right] \\ &= \frac{1}{2(k-1)} \frac{y}{(y^2 + 1)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2} \mathcal{I}_{k-1}(y). \end{aligned}$$

3. Man berechne

$$\int \frac{dx}{(x^2 + \beta x + \gamma)^k}.$$

Aus  $\beta^2 - 4\gamma < 0$  folgt  $\gamma - \beta^2/4 > 0$ . Wir setzen  $\alpha := \sqrt{\gamma - \beta^2/4}$ . Nun verwenden wir quadratische Ergänzung:

$$x^2 + \beta x + \gamma = \left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \underbrace{\left(\gamma - \frac{\beta^2}{4}\right)}_{=:\alpha^2 > 0} = \alpha^2 \left[\left(\frac{x + \beta/2}{\alpha}\right)^2 + 1\right].$$

Daher ist

$$\int \frac{dx}{(x^2 + \beta x + \gamma)^k} = \int \frac{dx}{\alpha^{2k} \left[\left(\frac{x + \beta/2}{\alpha}\right)^2 + 1\right]^k}.$$

Wir substituieren wie folgt:

$$y = \frac{x + \beta/2}{\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\alpha} \quad \Longrightarrow \quad dx = \alpha dy.$$

Also:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + \beta x + \gamma)^k} &= \int \frac{1}{\alpha^{2k} (y^2 + 1)^k} \alpha dy = \frac{1}{\alpha^{2k-1}} \int \frac{1}{(y^2 + 1)^k} dy \\ &= \frac{1}{\alpha^{2k-1}} \mathcal{I}_k(y) = \frac{1}{\alpha^{2k-1}} \mathcal{I}_k\left(\frac{x + \beta/2}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

4. Man berechne

$$\int \frac{2x + \beta}{(x^2 + \beta x + \gamma)^k} dx.$$

Wir machen folgende Substitution:

$$y = x^2 + \beta x + \gamma \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2x + \beta \quad \Longrightarrow \quad dx = \frac{dy}{2x + \beta}.$$

Also:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x + \beta}{(x^2 + \beta x + \gamma)^k} dx &= \int \frac{2x + \beta}{y^k} \frac{dy}{2x + \beta} = \int \frac{dy}{y^k} \\ &= \frac{1}{-k + 1} \frac{1}{y^{k-1}} + c = \frac{1}{-k + 1} \frac{1}{(x^2 + \beta x + \gamma)^{k-1}} + c. \end{aligned}$$

5. Wir schreiben den zu integrierenden Bruch wie folgt um:

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + \beta x + \gamma)^k} = \frac{B}{2} \frac{2x + \beta}{(x^2 + \beta x + \gamma)^k} + \left(C - \frac{B\beta}{2}\right) \frac{1}{(x^2 + \beta x + \gamma)^k}$$

Also erhalten wir aus 5. mit Hilfe von 3. und 4. folgende Formel:

$$\begin{aligned} & \int \frac{Bx + C}{(x^2 + \beta x + \gamma)^k} dx \\ &= \frac{B}{2} \frac{1}{-k + 1} \frac{1}{(x^2 + \beta x + \gamma)^{k-1}} + \left(C - \frac{B\beta}{2}\right) \frac{1}{\alpha^{2k-1}} \mathcal{I}_k \left(\frac{x + \beta/2}{\alpha}\right). \end{aligned}$$