Folie zur Vorlesung "Mathematik B"
23. März 2011

Nachtrag zu Parameterwechsel bei Kurven:

Beispiel: Die beiden Kurven

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \qquad \text{mit } t \in [0, 2\pi]$$

und

$$\vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} \qquad \text{mit } t \in [0, \pi]$$

stellen dieselbe Kurve dar, allerdings mit verschiedenen Durchlaufgeschwindigkeiten.

Frage: Bleibt die Bogenlänge einer Kurve durch Parameterwechsel (d.h. Änderung der Durchlaufgeschwindigkeit) allgemein immer gleich?

Sei $x : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ eine Kurve mit

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_d(t) \end{pmatrix} \qquad \text{mit } t \in [a, b].$$

Sei $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion mit $g(\alpha) = a$ und $g(\beta) = b$. Wir zeigen nun, dass die Kurve

$$\vec{y}(t) := \vec{x}\big(g(t)\big) = \begin{pmatrix} x_1\big(g(t)\big) \\ \vdots \\ x_d\big(g(t)\big) \end{pmatrix} \qquad \text{mit } t \in [\alpha, \beta]$$

dieselbe Bogenlänge besitzt wie $\vec{x}(t)$. Dazu berechnen wir den Tangentenvektor zur Kurve $\vec{y}(t)$:

$$\dot{\vec{y}}(t) = \begin{pmatrix} x_1'\big(g(t)\big) \cdot g'(t) \\ \vdots \\ x_d'\big(g(t)\big) \cdot g'(t) \end{pmatrix}$$

Also:

$$\begin{aligned} \|\dot{\vec{y}}(t)\| &= \sqrt{x_1'\big(g(t)\big)^2 \cdot g'(t)^2 + \cdots + x_d'\big(g(t)\big)^2 \cdot g'(t)^2} \\ &= \underbrace{g'(t)}_{>0} \sqrt{x_1'\big(g(t)\big)^2 + \cdots + x_d'\big(g(t)\big)^2} \\ &= g'(t) \cdot \|\dot{\vec{x}}\big(g(t)\big)\|. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Bogenlänge der Kurve $\vec{y}(t)$ im Intervall $[\alpha,\beta]$ als

$$\int_\alpha^\beta \|\dot{\vec{y}}(t)\| = \int_\alpha^\beta g'(t)\cdot\|\dot{\vec{x}}\big(g(t)\big)\|.$$

Wir substituieren wie folgt:

$$w = g(t) \quad \Longrightarrow \frac{dw}{dt} = g'(t) \quad \Longrightarrow dt = \frac{dw}{g'(t)}.$$

Somit ergibt sich:

$$\int_\alpha^\beta \|\dot{\vec{y}}(t)\| = \int_a^b g'(t)\cdot\|\dot{\vec{x}}(w)\|\frac{dw}{g'(t)} = \int_a^b \|\dot{\vec{x}}(w)\|\,dw,$$

also haben $\vec{y}(t)$ im Intervall $[\alpha,\beta]$ und $\vec{x}(t)$ im Intervall $[a,b]$ dieselbe Bogenlänge!

Bemerkung: Man zeigt analog, dass sich die Bogenlänge nicht ändert, falls die Kurve in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird, d.h. falls $g(t)$ monoton fallend ist mit $g(\alpha) = b$ und $g(\beta) = a$.

Zum obigen Beispiel: Dort setzt man

$$g(t) = 2t, \quad \alpha = a = 0, \quad \beta = \pi, \quad b = 2\pi.$$

und erhält $x_2(t) = x_1\big(g(t)\big)$.