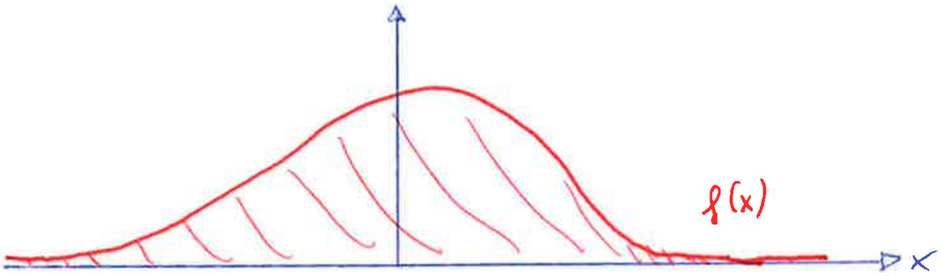
Folie zur Vorlesung "Mathematik B"
05. April 2011

Beispiel zu uneigentlichen Integralen über unendlichem Integrationsintervall:



Falls die Konvergenz von einem Integral der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

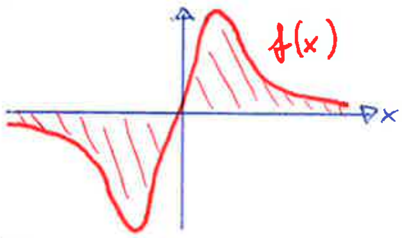
zu untersuchen ist, so müssen die beiden Integrale

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$$

mit beliebig wählbarem $a \in \mathbb{R}$ auf Konvergenz überprüft werden. Nur wenn beide Teilintegrale konvergieren, konvergiert auch $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$.

Beispiel: Man betrachte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx.$$



Wähle z.B. $a = 0$. Dann gilt:

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{2x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln|1+x^2|\Big|_0^{\infty} = \infty - 0 = \infty.$$

Also **divergiert** das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$.

Man beachte, dass man die Konvergenz **NICHT** zeigen kann, indem man den Limes

$$\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} f(x)\,dx$$

auf Endlichkeit überprüft! Zum Beispiel von oben:

$$\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} \frac{x}{1+x^2}dx = \lim_{c\to\infty} \frac{1}{2}\ln|1+x^2|\Big|_{-c}^{c} = \frac{1}{2}\ln|1+c^2| - \frac{1}{2}\ln|1+(-c)^2| = 0.$$

Also:

$$\lim_{c\to\infty} \int_{-c}^{c} \frac{x}{1+x^2}dx \neq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dx.$$