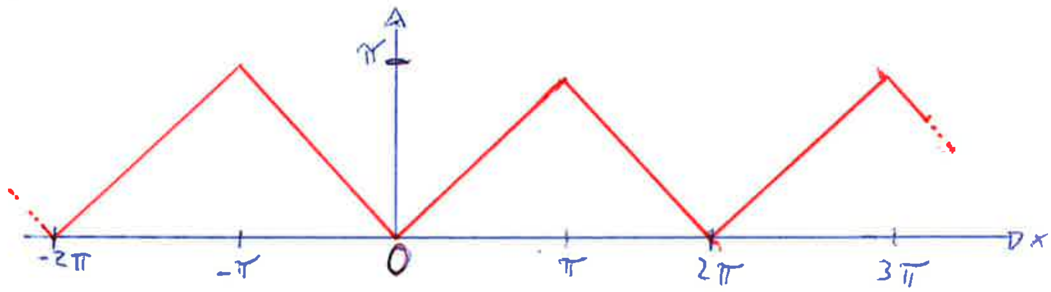
Folie zur Vorlesung "Mathematik B"
05. April 2011

Beispiele zu Fourierreihen:

Beispiel 1: Man betrachte die Funktion $f(x) = |x|$ im Intervall $[-\pi, \pi)$, welche 2π-periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird. Berechne die zu f gehörige Fourierreihe $\bar{f}$.



1. Bestimmung der Koeffizienten a_n:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x\cos(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx)\,dx$$

Wir bestimmen eine Stammfunktion zu $x\cos(nx)$ für $n \geq 1$ mit Hilfe von partieller Integration:

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{x}_{=f}\underbrace{\cos(nx)}_{=g'}\,dx &= x\cdot\frac{1}{n}\sin(nx) - \int \frac{1}{n}\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{x}{n}\sin(nx) - \frac{1}{n}\cdot\frac{-1}{n}\cos(nx) + c \\
&= \frac{x}{n}\sin(nx) + \frac{1}{n^2}\cos(nx) + c.
\end{aligned}$$

Also gilt für $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
a_n &= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin(nx) + \frac{1}{n^2}\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{0}\right] + \frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin(nx) + \frac{1}{n^2}\cos(nx)\Big|_{0}^{\pi}\right] \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[0 + \frac{1}{n^2} - 0 - \frac{1}{n^2}\cos(-n\pi)\right] + \frac{1}{\pi}\left[0 + \frac{1}{n^2}\cos(n\pi) - 0 - \frac{1}{n^2}\right] \\
&= -\frac{2}{n^2\pi} + \frac{2}{n^2\pi}\cos(n\pi) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ -\frac{4}{n^2\pi}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Außerdem:

$$a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \int_{-\pi}^{0} -x\, dx + \int_{0}^{\pi} x\, dx = -\frac{1}{2}x^2\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{2}x^2\Big|_{0}^{\pi} = 0 - \frac{-(-\pi)^2}{2} + \frac{\pi^2}{2} - 0 = \pi^2.$$

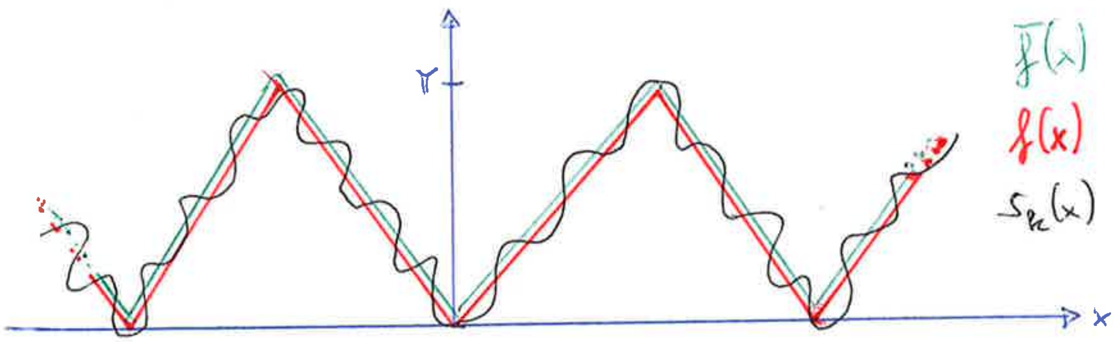
2. Da $f(x)$ eine gerade Funktion ist (d.h. $f(x) = f(-x)$), gilt $\mathbf{b_n} = \mathbf{0}$ für alle $n \geq 1$.

3. Die zu f gehörige Fourierreihe $\bar{f}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\bar{f}(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \\ &= \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos(nx) \\ &= \frac{\pi^2}{2} + \sum_{m\geq 1} \frac{-4}{(2m-1)^2\pi} \cos\big((2m-1)x\big).\end{aligned}$$

4. **Zusatzfrage:** Gilt $\bar{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$?

   Antwort: JA, da f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist, insbesondere stetig an den Stellen $-\pi$ und π.

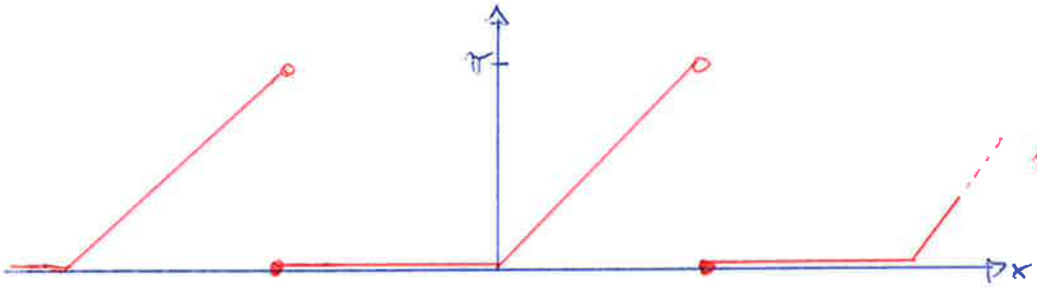


$$S_k(x) = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n \cos(nx)$$

Beispiel 2: Man betrachte die im Intervall $[-\pi, \pi)$ definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \in [-\pi, 0] \\ x, & \text{für } x \in (0, \pi) \end{cases},$$

welche zu einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion 2π periodisch fortgesetzt wird.



Berechne die zu f gehörige Fourierreihe $\bar{f}$ und überprüfe für welche $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $\bar{f}(x) = f(x)$ gilt.

1. Bestimmung der Koeffizienten a_n:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x\, dx = \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Für $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x}{n} \sin(nx) + \frac{1}{n^2} \cos(nx) \Big|_0^{\pi} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[0 + \frac{1}{n^2} \cos(n\pi) - 0 - \frac{1}{n^2} \right] \\ &= \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ -\frac{2}{n^2 \pi}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

2. Bestimmung der Koeffizienten b_n, $n \geq 1$:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx.$$

Wir berechnen eine Stammfunktion zu $x \sin(nx)$, $n \geq 1$, mit Hilfe von partieller Integration:

$$
\begin{aligned}
\int \underbrace{x}_{=f}\underbrace{\sin(nx)}_{=g'}\,dx &= x\cdot\frac{-1}{n}\cos(nx)-\int\frac{-1}{n}\cos(nx)\,dx\\
&= \frac{-x}{n}\cos(nx)+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\sin(nx)+c\\
&= \frac{-x}{n}\cos(nx)+\frac{1}{n^2}\sin(nx)+c.
\end{aligned}
$$

Also:

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{-x}{n}\cos(nx)+\frac{1}{n^2}\sin(nx)\Big|_0^\pi\Big] = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{-\pi}{n}\cos(n\pi)+0-0-0\Big]\\
&= \begin{cases} -\frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade,}\\ \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ ungerade.}\end{cases}
\end{aligned}
$$

3. Die zu f gehörige Fourierreihe $\bar{f}$ ist gegeben durch

$$
\begin{aligned}
\bar{f}(x) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n\geq 1} a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\\
&= \frac{\pi}{4}+\sum_{n\geq 1} a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\\
&= \frac{\pi}{4}+\sum_{m\geq 1}\frac{-2}{(2m-1)^2\pi}\cos\big((2m-1)x\big)+\frac{1}{2m-1}\sin\big((2m-1)x\big)\\
&\quad +\sum_{k\geq 1}-\frac{1}{2k}\sin(2kx).
\end{aligned}
$$

4. Gilt $\bar{f}(x)=f(x)$?

Antwort: f ist nur stetig an den Stellen $\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$ k ungerade, d.h. nur dort gilt $\bar{f}(x)=f(x)$. An den Sprungstellen von f nimmt $\bar{f}$ den Mittelwert von links- und rechtsseitigem Grenzwert von f an. Es gilt:

$$
\bar{f}(x)=\begin{cases} f(x), & \text{falls } x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}, \text{ k ungerade}\}\\ \frac{\pi}{2}, & \text{falls } x\in\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}, \text{ k ungerade}\}\end{cases}
$$