

# Folie zur Vorlesung “Mathematik B”

10. Mai 2011

## Newton-Verfahren zum Lösen von nicht-linearen Gleichungssystemen:

### Zur Erinnerung: 1-dimensionaler Fall:

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Gesucht ist eine Lösung der Gleichung  $f(x) = 0$ . Sei  $x_0 \in \mathbb{R}$  ein (fast) beliebiger Startwert. Man definiere für  $n \in \mathbb{N}$

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Dann gilt: Ist  $f'(x^*) \neq 0$ , wobei  $x^*$  eine Lösung von  $f(x) = 0$  ist, so konvergiert  $x_n$  gegen  $x^*$ , falls der Startwert “nahe” genug bei  $x^*$  liegt.

### Jetzt: 2-dimensionaler Fall:

Seien  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig (partiell) differenzierbare Funktionen.

Gesucht: Lösung  $(x^*, y^*)$  von

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0.$$

### Vorgehensweise zur näherungsweise Bestimmung einer Lösung:

Man beginne mit einem **Startwert**  $(x_0, y_0)$ , welcher “in der Nähe” der Lösung  $(x^*, y^*)$  liegt. (Dies kann i.A. eine schwierige Aufgabe sein, solch einen geeigneten Startwert zu finden; mittels geometrischer Überlegungen kann man eine geeignete Wahl “nahe” von  $(x^*, y^*)$  bestimmen).

Da  $f$  und  $g$  stetig differenzierbar sind, sind  $f$  und  $g$  insbesondere *total differenzierbar*, d.h. man kann  $f$  approximieren durch die Tangentialebene im Punkt  $(x_0, y_0)$ :

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(x_0, y_0) + \left\langle \nabla f(x_0, y_0), \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= f(x_0, y_0) + \left\langle \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0). \end{aligned}$$

Analog für  $g(x, y)$ :

$$g(x, y) = g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + g_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).$$

Das ursprüngliche Gleichungssystem  $f(x, y) = 0, g(x, y) = 0$  ersetzt man nun durch das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0), \\ 0 &= g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + g_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) \end{aligned}$$

Auflösen des linearen Gleichungssystems nach  $x$  und  $y$  ergibt mit Hilfe der Cramer'schen Regel:

$$\begin{aligned} x &= x_1 = x_0 - \frac{f(x_0, y_0)g_y(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0)g(x_0, y_0)}{f_x(x_0, y_0)g_y(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0)g_x(x_0, y_0)}, \\ y &= y_1 = y_0 - \frac{f_x(x_0, y_0)g(x_0, y_0) - f(x_0, y_0)g_x(x_0, y_0)}{f_x(x_0, y_0)g_y(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0)g_x(x_0, y_0)}. \end{aligned}$$

Das Ergebnis  $(x_1, y_1)$  wird nun als neuer Startwert benutzt, und daraus  $(x_2, y_2)$  berechnet, daraus  $(x_3, y_3), (x_4, y_4), \dots$

Definiere

$$D(x, y) := \det \begin{vmatrix} f_x(x, y) & f_y(x, y) \\ g_x(x, y) & g_y(x, y) \end{vmatrix} = f_x(x, y)g_y(x, y) - f_y(x, y)g_x(x, y).$$

Man beachte, daß der Nenner in den Lösungen  $(x_1, y_1)$  gleich  $D(x_0, y_0)$  ist.

Es gilt nun: Ist  $D(x^*, y^*) \neq 0$ , wobei  $(x^*, y^*)$  eine Lösung zu  $f(x, y) = g(x, y) = 0$  ist, so konvergiert  $(x_n, y_n)$  gegen  $(x^*, y^*)$ , falls der Startwert  $(x_0, y_0)$  "nahe" genug bei  $(x^*, y^*)$  liegt

**Beispiel:** Man berechne näherungsweise eine Lösung zu

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^3y + 2 \sin(x) - 1 = 0, \\ g(x, y) &= xy^2 + \sin(x) - 1.5 = 0. \end{aligned}$$

Wir wählen den Startpunkt  $(x_0, y_0) = (1, 1)$ , und erhalten iteriert folgende Werte:

$i$	$x_i$	$y_i$
0	1	1
1	0.543203	1.18107
2	0.441758	1.53469
3	0.4460	1.5481
4	0.44598	1.54796

Nach 4 Schritten kann hier die Berechnung abgebrochen werden, da sich die Werte  $(x_i, y_i)$  kaum mehr unterscheiden, d.h. wir erhalten approximativ

$$(x^*, y^*) \approx (0.44598, 1.54796).$$