Folie zur Vorlesung "Mathematik B"
11. Mai 2011

Beispiel zur Bestimmung von Extrempunkten im Mehrdimensionalen:

Aufgabe: Man bestimme die Extrempunkte sowie deren Typen zur Funktion

$$f(x,y) = x^2y - xy^2 + y.$$

Lösung: Zunächst werden die Extrempunkte bestimmt:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy - y^2 \\ x^2 - 2xy + 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \vec{0}$$

D.h.

$$\begin{aligned} 2xy - y^2 &= 0, \\ x^2 - 2xy + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Falls $y = 0$ ist, muss gelten: $x^2 + 1 = 0$, ein Widerspruch, d.h. wir können $y \neq 0$ annehmen! Das obige Gleichungssystem wird also durch Kürzen von y zu

$$\begin{aligned} 2x - y &= 0 \\ x^2 - 2xy + 1 &= 0, \end{aligned}$$

d.h.

$$y = 2x \quad \text{und} \quad 0 = x^2 - 2x \cdot \underbrace{2x}_{=y} + 1 = x^2 - 4x^2 + 1 = -3x^2 + 1.$$

Also:

$$3x^2 = 1 \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Die stationären Punkte (=Extrempunkte) sind also:

$$P_1 = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, 2\sqrt{\frac{1}{3}}\right), P_2 = \left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -2\sqrt{\frac{1}{3}}\right).$$

Zur Bestimmung der Typen der stationören Punkte benötigen wir die Hesse-Matrix:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x-2y \\ 2x-2y & -2x \end{pmatrix}$$

- **Typ von P_1:**

  $$H_f\Big(\sqrt{\frac{1}{3}}, 2\sqrt{\frac{1}{3}}\Big) = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

  Da

  $$H_f\Big(\sqrt{\frac{1}{3}}, 2\sqrt{\frac{1}{3}}\Big) = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{3}} - \frac{-2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-2}{\sqrt{3}} = -\frac{12}{3} = -4 < 0,$$

  ist die Hesse-Matrix an der Stelle P_1 indefinit, d.h. P_1 ist ein **Sattelpunkt**.

- **Typ von P_2:**

  $$H_f\Big(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -2\sqrt{\frac{1}{3}}\Big) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

  Da

  $$H_f\Big(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -2\sqrt{\frac{1}{3}}\Big) = -\frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{12}{3} = -4 < 0,$$

  ist die Hesse-Matrix an der Stelle P_2 indefinit, d.h. P_2 ist ein **Sattelpunkt**.

Aufgabe: Man bestimme die Extrempunkte sowie deren Typen zur Funktion

$$f(x,y,z) = -\ln(x^2+y^2+z^2+1).$$

Lösung: Zunächst werden die Extrempunkte bestimmt:

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\frac{2x}{x^2+y^2+z^2+1} \\ -\frac{2y}{x^2+y^2+z^2+1} \\ -\frac{2z}{x^2+y^2+z^2+1} \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Es muss also gelten:

$$x = y = z = 0,$$

d.h. der einzige stationäre Punkt ist $P = (0,0,0)$.

Wir bestimmen nun den Typ von P:

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{-2(-x^2+y^2+z^2+1)}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} & \frac{4xy}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} & \frac{4xz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} \\ \frac{4xy}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} & \frac{-2(x^2-y^2+z^2+1)}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} & \frac{4yz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} \\ \frac{4xz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} & \frac{4yz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} & \frac{-2(x^2+y^2-z^2+1)}{(x^2+y^2+z^2+1)^2} \end{pmatrix}$$

Wir werten nun die Hesse-Matrix im Punkt P aus:

$$H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$H_f^{(1)}$ $H_f^{(2)}$

D.h. $\det H_f(0,0,0) = -8 < 0$. Außerdem:

$$\begin{aligned} \det H_f^{(1)}(0,0,0) &= -2 < 0 \quad \text{und} \\ \det H_f^{(2)}(0,0,0) &= 4 > 0. \end{aligned}$$

Also ist $H_f(0,0,0)$ negativ definit. Somit liegt bei P ein **relatives Maximum** vor.