

# Folie zur Vorlesung "Mathematik B"

17. Mai 2011

## Beispiel zur Bestimmung von Extrempunkten:

**Aufgabe:** Man bestimme die Extrempunkte sowie deren Typen der Funktion

$$f(x, y) = x^2y - xy - xy^2 + y^2.$$

**Lösung:** Zunächst werden die stationären Punkte bestimmt:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy - y - y^2 \\ x^2 - x - 2xy + 2y \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \vec{0}.$$

Also muß gelten:

$$2xy - y - y^2 = 0, \quad (1)$$

$$x^2 - x - 2xy + 2y = 0. \quad (2)$$

Falls  $y = 0$  ist, so wird (1) zu "0 = 0" und Gleichung (2) zu

$$x^2 - x = 0, \quad \text{d.h. } x(x - 1) = 0, \quad \text{d.h. } x = 0 \text{ oder } x = 1.$$

Also sind  $P_1 = (0, 0)$  und  $P_2 = (1, 0)$  stationär!

Nun betrachten wir den Fall  $y \neq 0$  und kürzen in Gleichung (1) durch  $y$  und erhalten:

$$2x - 1 - y = 0 \quad \implies \quad y = 2x - 1.$$

Dies setzen wir in Gleichung (2) ein:

$$x^2 - x - 2x \cdot (2x - 1) + 2 \cdot (2x - 1) = 0$$

$$\implies x^2 - x - 4x^2 + 2x + 4x - 2 = 0$$

$$\implies -3x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$\implies x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{-6} = \begin{cases} \frac{-5+1}{-6} = \frac{2}{3} \\ \frac{-5-1}{-6} = 1 \end{cases}$$

Also sind auch die Punkte

$$P_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad P_4 = (1, 1)$$

stationär!

Zur Bestimmung der Typen der stationären Punkte berechnen wir die Hesse-Matrix:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x - 1 - 2y \\ 2x - 1 - 2y & -2x + 2 \end{pmatrix}.$$

### Typbestimmung der stationären Punkte:

1.  $P_1 = (0, 0)$ : Es ist

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da  $\det H_f(0, 0) = 0 - 1 = -1 < 0$ , ist  $H_f(0, 0)$  indefinit. Somit ist  $P_1$  ein **Sattelpunkt**.

2.  $P_2 = (1, 0)$ : Es ist

$$H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da  $\det H_f(1, 0) = 0 - 1 = -1 < 0$ , ist  $H_f(1, 0)$  indefinit, und somit ist  $P_2$  ein **Sattelpunkt**.

3.  $P_3 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ : Es ist

$$H_f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Da

$$f_{xx}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} > 0 \quad \text{und} \quad \det H_f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3} > 0,$$

ist  $H_f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$  positiv definit. Somit ist  $P_3$  ein **Minimum**.

4.  $P_4 = (1, 1)$ : Es ist

$$H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da  $\det H_f(1, 1) = 0 - 1 = -1 < 0$ , ist  $H_f(1, 1)$  indefinit, und somit ist  $P_4$  ein **Sattelpunkt**.