Folie zur Vorlesung "Mathematik B"
17. Mai 2011

Beispiel zur Bestimmung von Extrempunkten unter Nebenbedingung mit Hilfe von Parametrisierung:

Aufgabe: Man bestimme die Extrempunkte sowie deren Typen zur Funktion

$$f(x,y) = x^2 y$$

unter der Nebenbedingung $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

Lösung: Wir parametrisieren mit Hilfe von Polarkoordinaten:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

wobei $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$. Einsetzen dieser Parametrisierung in die Nebenbedingung ergibt:

$$g(x,y) = g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi - 1 = r^2 - 1 = 0,$$

d.h. die Nebenbedingung wird zu $r = 1$. Einsetzen der Parametrisierung in $f(x,y)$ unter Berücksichtigung von $r = 1$ ergibt:

$$h(\varphi) := f(\cos\varphi, \sin\varphi) = \cos^2\varphi\,\sin\varphi.$$

Es sind nun die Extrempunkte von $h(\varphi)$ zu bestimmen:

$$\begin{aligned} h'(\varphi) &= 2\cos\varphi(-\sin\varphi)\sin\varphi + \cos^2\varphi\cos\varphi \\ &= \cos\varphi(-2\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = \cos\varphi\cdot(1 - 3\sin^2\varphi) \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\underbrace{\cos\varphi = 0}_{\Longrightarrow \varphi\in\{\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\}} \quad \text{oder} \quad 1 - 3\sin^2\varphi = 0$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} 1 - 3\sin^2\varphi = 0 &\Longrightarrow \sin^2\varphi = \frac{1}{3} \Longrightarrow |\sin\varphi| = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ &\Longrightarrow \varphi \in \left\{\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}, \arcsin -\frac{1}{\sqrt{3}}, \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}, \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Typen dieser Extrempunkte berechnen wir $h''(\varphi)$:

$$\begin{aligned} h''(\varphi) &= -\sin\varphi\cdot(1-3\sin^2\varphi)+\cos\varphi\cdot(-6)\sin\varphi\cdot\cos\varphi \\ &= -\sin\varphi\cdot(1-3\sin^2\varphi)-6\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} h''\Big(\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) &\approx -2.31 \Longrightarrow \text{Maximum bei } \varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ h''\Big(\frac{\pi}{2}\Big) &= 2 \Longrightarrow \text{Minimum bei } \varphi=\frac{\pi}{2}, \\ h''\Big(\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) &\approx -2.31 \Longrightarrow \text{Maximum bei } \varphi=\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ h''\Big(\pi+\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) &\approx 2.31 \Longrightarrow \text{Minimum bei } \varphi=\pi+\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}, \\ h''\Big(\frac{3\pi}{2}\Big) &= -2 \Longrightarrow \text{Maximum bei } \varphi=\frac{3\pi}{2}, \\ h''\Big(\arcsin-\frac{1}{\sqrt{3}}\Big) &\approx 2.31 \Longrightarrow \text{Minimum bei } \varphi=\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

<u>**Skizze:**</u>