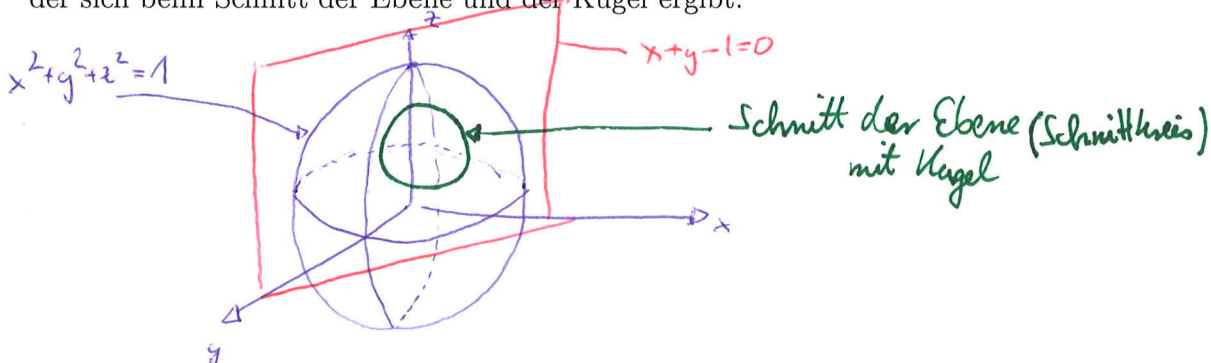


### Lagrange-Methode mit mehreren Nebenbedingungen:

Aufgabe: Maximiere/minimiere  $f(x, y, z) = xyz$  unter den beiden Nebenbedingungen  $g_1(x, y, z) = x + y - 1 = 0$  (Ebene im  $\mathbb{R}^3$ ) und  $g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$  (Kugel im  $\mathbb{R}^3$  mit Radius 1 um  $\vec{0}$ ).

Skizze: Es sind die Extrema von  $f(x, y, z)$  zu finden auf dem Schnittkreis, der sich beim Schnitt der Ebene und der Kugel ergibt:



Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) &= f(x, y, z) + \lambda_1 g_1(x, y, z) + \lambda_2 g_2(x, y, z) \\ &= xyz + \lambda_1(x + y - 1) + \lambda_2(x^2 + y^2 + z^2 - 1). \end{aligned}$$

$$\nabla L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} yz + \lambda_1 + 2x\lambda_2 \\ xz + \lambda_1 + 2y\lambda_2 \\ xy + 2z\lambda_2 \\ x + y - 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Subtraktion der zweiten Koordinate von der ersten Koordinate des Gradienten ergibt:

$$-z(x - y) + 2\lambda_2(x - y) = 0 \implies \lambda_2 = \frac{z(x - y)}{2(x - y)} = \frac{z}{2} \text{ falls } x \neq y.$$

Aus der letzten Zeile der Gradientengleichung folgt:  $z^2 = 1 - x^2 - y^2$ . Aus der vierten Gleichung folgt  $y = 1 - x$ . Einsetzen in die dritte Koordinatengleichung des Gradienten ergibt:

$$0 = xy + 2z \frac{z}{2} = xy + 1 - x^2 - y^2 = x(1 - x) + 1 - x^2 - (1 - x)^2 = 3x(1 - x).$$

Daraus folgt  $x = 0$  oder  $x = 1$ . Falls  $x = 0$ , so gilt  $y = 1 - x = 1$  und  $z = 1 - x^2 - y^2 = 0$ ; falls  $x = 1$ , so gilt  $y = 1 - x = 0$  und  $z = 1 - x^2 - y^2 = 0$ . D.h.  $(1, 0, 0)$  und  $(0, 1, 0)$  sind stationäre Punkte!

Wir betrachten nun den Fall  $x = y$ : Aus der vierten Gradientengleichung folgt:

$$0 = x + y - 1 = x + x - 1 \implies x = y = \frac{1}{2}.$$

Daraus folgt  $z^2 = 1 - x^2 - y^2 = 1 - 2x^2 = \frac{1}{2}$ , d.h.  $z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Also sind auch  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  und  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  stationäre Punkte! Welche Typen von stationären Punkten liegen vor?

Es gilt  $f(1, 0, 0) = f(0, 1, 0) = 0$  und  $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}) > 0$  sowie  $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) < 0$ . Also muß bei  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  ein Maximum vorliegen und bei  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$  ein Minimum vorliegen. An den Punkten  $(1, 0, 0)$  und  $(0, 1, 0)$  können nur Sattelpunkte vorliegen, da ansonsten auf dem Schnittkreis "dazwischen" noch weitere Maxima oder Minima existieren müssten (es gibt aber keine weiteren stationären Punkte, also keine weiteren Maxima/Minima).

Skizze des Schnittkreises:

