Folie zur Vorlesung "Mathematik B"
18. Mai 2011

Kettenregel für Vektorfelder:

Satz: Seien

$$\vec{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad : \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix},$$

$$\vec{g} : E \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k \quad : \quad (y_1, \ldots, y_m) \mapsto \begin{pmatrix} g_1(y_1, \ldots, y_m) \\ \vdots \\ g_k(y_1, \ldots, y_m) \end{pmatrix}$$

total differenzierbare Vektorfelder. Sei $\vec{a} \in D$ ein innerer Punkt, so daß auch $\vec{f}(\vec{a})$ ein innerer Punkt von E ist. Dann ist die Funktion

$$\vec{g} \circ \vec{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \begin{pmatrix} g_1\big(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\big) \\ \vdots \\ g_k\big(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\big) \end{pmatrix}$$

total differenzierbar und es gilt:

$$J_{\vec{g} \circ \vec{f}}(\vec{a}) = J_{\vec{g}}\big(\vec{f}(\vec{a})\big) \cdot J_{\vec{f}}\big(\vec{a}\big).$$

Beweis der Gleichung: Es gilt:

$$J_{\vec{g}}\big(\vec{f}(\vec{a})\big) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}\big(f_1(\vec{a}), \ldots, f_m(\vec{a})\big) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}\big(f_1(\vec{a}), \ldots, f_m(\vec{a})\big) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_i}{\partial y_1}\big(f_1(\vec{a}), \ldots, f_m(\vec{a})\big) & \ldots & \frac{\partial g_i}{\partial y_m}\big(f_1(\vec{a}), \ldots, f_m(\vec{a})\big) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1}\big(f_1(\vec{a}), \ldots, f_m(\vec{a})\big) & \ldots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m}\big(f_1(\vec{a}), \ldots, f_m(\vec{a})\big) \end{pmatrix}$$

und

$$J_{\vec{f}}\big(\vec{a}\big) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\vec{a}) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\vec{a}) & \ldots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{a}) & \ldots & \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\vec{a}) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

Man beachte, daß der Eintrag von $J_{\vec{g}\circ\vec{f}}(\vec{a})$ in der i-ten Zeile und j-ten Spalte genau

$$\frac{\partial(g_i \circ f)}{\partial x_j}(\vec{a}) \tag{1}$$

entspricht. Wir berechnen nun den Eintrag von $J_{\vec{g}}\big(\vec{f}(\vec{a})\big) \cdot J_{\vec{f}}\big(\vec{a}\big)$ in der i-ten Zeile und j-ten Spalte:

$$\sum_{l=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_l}\big(\vec{f}(\vec{a})\big) \cdot \frac{\partial f_l}{\partial x_j}(\vec{a}). \tag{2}$$

Aufgrund der Kettenregel entspricht (2) genau der partiellen Ableitung (1).

$\square$