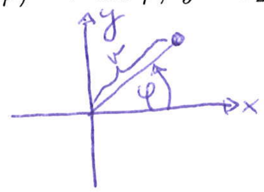
Folie zur Vorlesung "Mathematik B"

Beispiele zur Transformationsregel:

1. **Polarkoordinaten:**

   Allgemein kann man Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit Hilfe von Polarkoordinaten (r, φ) mit $r \geq 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ eindeutig darstellen:

$$x = x_1(r, \varphi) = r\,\cos\varphi,\ \ y = x_2(r, \varphi) = r\,\sin\varphi.$$



   Die zugehörige Jacobimatrix ist gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

   Die Jacobideterminante ist somit $\det J = r\cos^2\varphi - (-r\sin^2\varphi) = r$.

   Aufgabe: Gesucht ist das Integral $\int_D f(x, y)\,dx\,dy$ mit

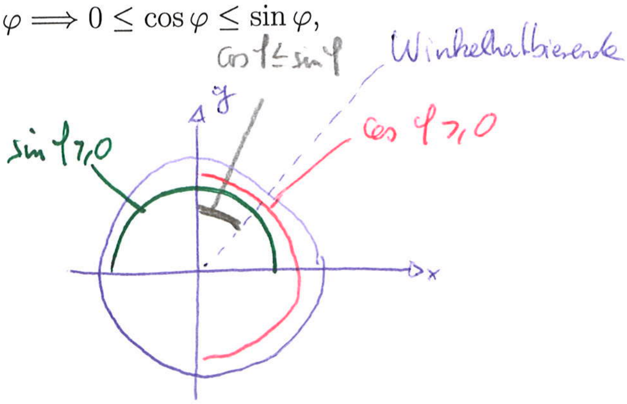
$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2x\sqrt{x^2 + y^2} \text{ und} \\ D &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y, x^2 + y^2 \leq 4\right\}. \end{aligned}$$

   Lösung: Wir gehen zu Polarkoordinaten über und ersetzen $x = r\,\cos\varphi$ und $y = r\,\sin\varphi$. Da wir über D integrieren, müssen wir die neuen Grenzen für r und φ bestimmen:

   - Aus der Bedingung $0 \leq x \leq y$ folgt

$$0 \leq r\,\cos\varphi \leq r\,\sin\varphi \Longrightarrow 0 \leq \cos\varphi \leq \sin\varphi,$$

     d.h. $\varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. (Skizze!)



- Aus der Bedingung $x^2+y^2 \leq 4$ folgt eingesetzt $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2 \leq 4$, d.h. $\underline{0 \leq r \leq 2}$.

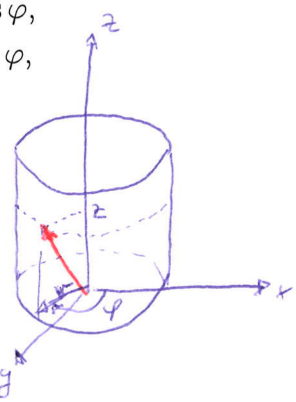
Es ist $f(x,y) = 2r\cos\varphi\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = 2r^2\cos\varphi$. Somit ergibt sich das gesuchte Integral wie folgt:

$$\begin{aligned}
\int_D f(x,y)\,dx\,dy &= \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2}\int_{r=0}^{2} f(r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi)\cdot|\det J|\,dr\,d\varphi \\
&= \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2}\int_{r=0}^{2} 2r^2\cos\varphi\cdot r\,dr\,d\varphi = \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2}\int_{r=0}^{2} 2r^3\cos\varphi\,dr\,d\varphi \\
&= \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{2}r^4\cos\varphi\Big|_0^2\,d\varphi \\
&= \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} 8\cos\varphi\,d\varphi = 8\sin\varphi\Big|_{\varphi=\pi/4}^{\pi/2} = 8 - \frac{8}{\sqrt{2}} = 8 - 4\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

2. **Zylinderkoordinaten:**

Allgemein kann man Punkte $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ mit Hilfe von Zylinderkoordinaten (r,φ,z) mit $r \geq 0$, $\varphi \in [0,2\pi)$ und $z \in \mathbb{R}$ eindeutig darstellen:

$$\begin{aligned}
x &= x_1(r,\varphi,z) = r\,\cos\varphi, \\
y &= x_2(r,\varphi,z) = r\,\sin\varphi, \\
z &= x_3(r,\varphi,z) = z.
\end{aligned}$$



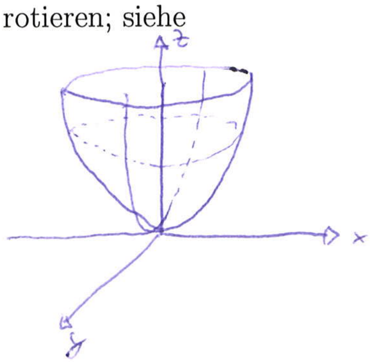
Die zugehörige Jacobimatrix ist gegeben durch

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_1}{\partial z} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_2}{\partial z} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Jacobideterminante ist somit $\det J = r\cos^2\varphi - (-r\sin^2\varphi) = r$.

Aufgabe: Eine Parabel lasse man um die z-Achse im $\mathbb{R}^3$ rotieren; siehe Skizze. Man berechne das Volumen des Körpers

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}.$$



Lösung: Wir gehen zu Zylinderkoordinaten über und ersetzen $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ und $z = z$. Da wir über K integrieren, müssen wir die neuen Grenzen für r, φ und z bestimmen:

- Aus der einzigen Bedingung $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ folgt $r^2 \leq z \leq 1$, d.h. $\varphi \in [0, 2\pi)$, $0 \leq r \leq 1$ und $r^2 \leq z \leq 1$.

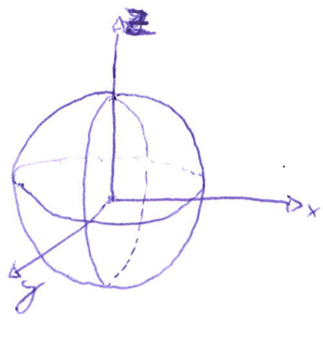
Da wir ein Volumen berechnen ist das Integral der konstanten Funktion 1 über dem Bereich K zu berechnen. Somit ergibt sich das gesuchte Integral wie folgt:

$$
\begin{aligned}
\int_K 1\,dx\,dy\,dz &= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=r^2}^{1} 1\cdot r\,dz\,dr\,d\varphi \\
&= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} rz\Big|_{r^2}^{1}\,dr\,d\varphi \\
&= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} r - r^3\,dr\,d\varphi \\
&= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\Big|_0^1\,dr\,d\varphi \\
&= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{4}\,d\varphi = \frac{1}{4}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

3. **Kugelkoordinaten:**

Allgemein kann man Punkte $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ mit Hilfe von Kugelkoordinaten (r, φ, ν) mit $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $\nu \in [0, \pi]$ eindeutig darstellen:

$$
\begin{aligned}
x &= x_1(r, \varphi, \nu) = r\cos\varphi\sin\nu, \\
y &= x_2(r, \varphi, \nu) = r\sin\varphi\sin\nu, \\
z &= x_3(r, \varphi, \nu) = r\cos\nu.
\end{aligned}
$$



$\varphi \mathrel{\hat{=}}$ Längengrad
$\nu \mathrel{\hat{=}}$ Breitengrad
$r \mathrel{\hat{=}}$ Radius

Man beachte, daß $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Die zugehörige Jacobimatrix ist gegeben durch

$$
J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_1}{\partial \nu} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_2}{\partial \nu} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} & \frac{\partial x_3}{\partial \nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\nu & -r\sin\varphi\sin\nu & r\cos\varphi\cos\nu \\ \sin\varphi\sin\nu & r\cos\varphi\sin\nu & r\sin\varphi\cos\nu \\ \cos\nu & 0 & -r\sin\nu \end{pmatrix}
$$

Die Jacobideterminante ist somit

$$\begin{aligned}\det J &= -r^2\cos^2\varphi\sin^3\nu - r^2\sin^2\varphi\sin\nu\cos^2\nu \\ &\quad -r^2\cos^2\varphi\cos^2\nu\sin\nu - r^2\sin^2\varphi\sin^3\nu \\ &= -r^2\sin^3\nu - r^2\sin\nu\cos^2\nu = -r^2\sin\nu.\end{aligned}$$

Also: $|\det J| = r^2\sin\nu$.

Aufgabe: Man berechne das Integral $\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ mit

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2)z, \quad D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le y,\ 0\le z,\ x^2+y^2+z^2\le y\}.$$

Da wir über D integrieren, müssen wir die neuen Grenzen für r, φ und ν bestimmen:

- Aus $0 \le y = r\sin\varphi\sin\nu$ folgt wegen $r\ge 0$ und $\sin\nu \ge 0$ die Ungleichung $0\le\sin\varphi$, d.h. $\varphi\in[0,\pi]$.
- Aus $0\le z = r\cos\nu$ folgt wegen $r\ge 0$ die Ungleichung $0\le\cos\nu$, d.h. $\nu\in[0,\pi/2]$.
- Aus der Bedingung $x^2+y^2+z^2\le y$ folgt $r^2\le r\sin\varphi\sin\nu$, d.h. $0\le r\le\sin\varphi\sin\nu$.

Es ist $f(x,y,z) = r^2\sin^2\nu\cdot r\cos\nu = r^3\sin^2\nu\cos\nu$. Somit ergibt sich das gesuchte Integral wie folgt:

$$\begin{aligned}\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz &= \int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\nu=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{\sin\varphi\sin\nu} r^3\sin^2\nu\cos\nu\cdot r^2\sin\nu\,dr\,d\nu\,d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\nu=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^{\sin\varphi\sin\nu} r^5\sin^3\nu\cos\nu\,dr\,d\nu\,d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\nu=0}^{\pi/2} \frac{1}{6}r^6\sin^3\nu\cos\nu\Big|_0^{\sin\varphi\sin\nu} d\nu\,d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{\nu=0}^{\pi/2} \frac{1}{6}\sin^6\varphi\sin^9\nu\cos\nu\,d\nu\,d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\pi} \frac{1}{6}\sin^6\varphi\frac{1}{10}\sin^{10}\nu\Big|_0^{\pi/2} d\varphi \\ &= \int_{\varphi=0}^{\pi}\frac{1}{60}\sin^6\varphi\,d\varphi = \ldots = \frac{1}{60}\frac{5\pi}{16} = \frac{\pi}{192}.\end{aligned}$$

Zur Berechnung des letzten Integrals verwende man die Rekursionsformeln zu Integralen der Form $\int\sin^k\varphi\,d\varphi$; siehe Skriptum Seite F-23.