Folie zur Vorlesung "Mathematik B"
01. Juni 2011

Beispiel zu Orthogonaltrajektorien

Man betrachte die Kurvenschar $y = C\,e^x$ mit $C \in \mathbb{R}$. Es sollen nun die Orthogonaltrajektorien bestimmt werden, d.h. alle Kurven, welche senkrecht auf **allen** Kurven $y = C\,e^x$ stehen.

Lösung: Die Kurvenschar ist gegeben durch $\phi(x, y, C) = y - C\,e^x = 0$. Differentiation der Gleichung nach x liefert:

$$0 = \phi_x \cdot \frac{\partial x}{\partial x} + \phi_y \frac{\partial y}{\partial x} + \phi_C \frac{\partial y}{\partial x} = \phi_x + \phi_y y'.$$

Konkret in diesem Beispiel ergibt sich also

$$0 = -C\,e^x + 1 \cdot y' = -C\,e^x + y'.$$

Es wird nun y' ersetzt durch $-1/y'$, dem Anstieg der Orthogonaltrajektorien. D.h. es ergibt sich

$$0 = -C\,e^x - \frac{1}{y'}.$$

Auflösen nach C ergibt:

$$C = -\frac{1}{y'} e^{-x}.$$

Einsetzen in $\phi(x, y, C) = 0$ ergibt

$$0 = y - \frac{-1}{y'} e^{-x} e^x = y + \frac{1}{y'}.$$

Diese DGL ist mit Hilfe von Trennung der Variablen wie folgt zu lösen:

$$y' = -\frac{1}{y} \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y} \implies y\,dy = -\,dx$$

$$\implies \frac{1}{2}y^2 = -x + c \implies y^2 = -2x + c_1 \implies y = \pm\sqrt{-2x + c_1}$$

Skizze: