

# Folie zur Vorlesung “Mathematik B”

01. Juni 2011

## Besondere Form der Differentialgleichung - Teil 1:

Man betrachte eine Differentialgleichung der Form

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (1)$$

Es wird folgende Substitution durchgeführt:

$$z = \frac{y}{x}.$$

Daraus folgt  $y = xz$  und

$$z' = \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{y'}{x} - \frac{z}{x},$$

bzw. nach  $y'$  aufgelöst

$$y' = xz' + z.$$

Einsetzen in (1) ergibt

$$xz' + z = f(z) \quad \Longrightarrow \quad z' = \frac{1}{x} \cdot (f(z) - z). \quad (2)$$

Diese Differentialgleichung ist nun durch Trennung der Variablen zu lösen und man erhält daraus die Lösung von (1) als  $y = xz$ .

**Beispiel:** Man löse

$$y' = \sqrt{\frac{y}{x} - 1} + \frac{y}{x}. \quad (3)$$

D.h. es ist  $f(t) = \sqrt{t-1} + t$ . Eingesetzt in (2) ergibt dies also die neue DGL

$$z' = \frac{1}{x} \left( (\sqrt{z-1} + z) - z \right) = \frac{\sqrt{z-1}}{x}.$$

Diese DGL wird mit Hilfe von Trennung der Variablen gelöst:

$$\begin{aligned}z' &= \frac{\sqrt{z-1}}{x} &\implies & \frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{z-1}}{x} \\ & &\implies & \frac{dz}{\sqrt{z-1}} = \frac{dx}{x} \\ & &\implies & \int \frac{dz}{\sqrt{z-1}} = \int \frac{dx}{x} \\ & &\implies & 2\sqrt{z-1} = \ln|x| + c \\ & &\implies & z-1 = \frac{1}{4}(\ln|x| + c)^2 \\ & &\implies & z = \frac{1}{4}(\ln|x| + c)^2 + 1.\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die gesuchte Lösung für (3) als

$$y = xz = \frac{x}{4}(\ln|x| + c)^2 + x.$$

## Besondere Form der Differentialgleichung - Teil 2:

Man betrachte eine Differentialgleichung der Form

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right). \quad (4)$$

Es gibt zwei Möglichkeiten:

$$\text{Fall 1: } \det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = 0, \quad \text{Fall 2: } \det \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \neq 0.$$

**Zum Fall 1:** Wir nehmen  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  an; falls  $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ , so liegt eine DGL der Form  $y' = f(\bar{a}x + \bar{b}y + \bar{c})$  vor, siehe weiter unten (5).

Die Vektoren  $(a, b)$  und  $(\alpha, \beta)$  sind linear abhängig, d.h. es existiert ein  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  mit

$$\lambda(\alpha, \beta) = (a, b).$$

D.h. es gilt:

$$ax + by = \lambda\alpha x + \lambda\beta y = \lambda(\alpha x + \beta y).$$

Wir machen nun folgende Umformungen:

$$\begin{aligned} & \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma} \\ &= \frac{\lambda(\alpha x + \beta y) + c}{\alpha x + \beta y + \gamma} \\ &= \frac{\lambda(\alpha x + \beta y + \frac{c}{\lambda})}{\alpha x + \beta y + \gamma} \\ &= \frac{\lambda(\alpha x + \beta y + \gamma - (\gamma - \frac{c}{\lambda}))}{\alpha x + \beta y + \gamma} \\ &= \lambda \cdot \left(1 - \frac{\gamma - \frac{c}{\lambda}}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right). \end{aligned}$$

Setze nun

$$g(t) := \lambda \cdot \left(1 - \frac{\gamma - \frac{c}{\lambda}}{t}\right) \quad \text{und} \quad F(t) = (f \circ g)(t) = f(g(t)).$$

Somit kann man die Differentialgleichung 4 schreiben als

$$y' = f(g(\alpha x + \beta y + \gamma)) = F(\alpha x + \beta y + \gamma). \quad (5)$$

Falls  $\beta = 0$ , so hängt  $F(\alpha x + \beta y + \gamma) = F(\alpha x + \gamma)$  nur von  $x$  und nicht von  $y$  ab; somit kann man die Lösung mittels Trennung der Variablen bestimmen.

Wir nehmen nun im Folgenden  $\beta \neq 0$  an. Man substituiere

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma.$$

Daraus folgt

$$z' = \alpha + \beta y', \quad \text{d.h. } y' = \frac{z' - \alpha}{\beta}.$$

Einsetzen in (5) ergibt

$$\frac{z' - \alpha}{\beta} = F(z) \quad \Longrightarrow \quad z' = \beta F(z) + \alpha. \quad (6)$$

Diese Differentialgleichung ist möglicherweise einfacher zu lösen als die Ausgangsgleichung (4).

**Beispiel:** Man löse

$$y' = f\left(\frac{4x - 6y + 6}{2x - 3y + 2}\right) \quad \text{mit } f(t) = \frac{1}{(t-2)^2} + \frac{2}{3}.$$

Es gilt:  $2 \cdot (2x - 3y) = 4x - 6y$ , d.h. es liegt Fall 1 vor mit  $\lambda = 2$ ,  $c = 6$ ,  $\gamma = 2$ ,  $\beta = -3$ . Man substituiere  $z = 2x - 3y + 2$ . Ferner ist

$$g(t) = 2 \cdot \left(1 - \frac{2 - \frac{6}{2}}{t}\right) = 2 + \frac{2}{t}.$$

Also:

$$F(t) = f(g(t)) = \frac{1}{\left(2 + \frac{2}{t} - 2\right)^2} + \frac{2}{3} = \frac{t^2}{4} + \frac{2}{3}.$$

Eingesetzt in Formel (6) ergibt dies die neue DGL:

$$z' = \left(\frac{z^2}{4} + \frac{2}{3}\right)(-3) + 2 = -\frac{3}{4}z^2.$$

Mit Hilfe der Method der Trennung der Variablen erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= -\frac{3}{4}z^2 \\ \Longrightarrow \frac{dz}{z^2} &= -\frac{3}{4}dx \\ \Longrightarrow \int \frac{dz}{z^2} &= \int -\frac{3}{4}dx \\ \Longrightarrow -\frac{1}{z} &= -\frac{3}{4}x + c_0 \\ \Longrightarrow z &= \frac{1}{\frac{3}{4}x - c_0} = \frac{4}{3x + c_1}. \end{aligned}$$

Da  $z = 2x - 3y + 2$ , ergibt sich für die gesuchte Lösung  $y$ :

$$y = \frac{1}{3}(2x + 2 - z) = \frac{2}{3x} + \frac{2}{3} - \frac{4}{9x + c_2}.$$

**Zum Fall 2:** In diesem Fall ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax + by &= -c \\ \alpha x + \beta y &= -\gamma \end{aligned}$$

eindeutig lösbar. Sei  $(x_0, y_0)$  die zugehörige, eindeutige Lösung. Man setze

$$\bar{x} := x - x_0, \quad \bar{y} := y - y_0.$$

Man macht folgende Umformung:

$$\begin{aligned} \frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma} &= \frac{a(\bar{x} + x_0) + b(\bar{y} + y_0) + c}{\alpha(\bar{x} + x_0) + \beta(\bar{y} + y_0) + \gamma} \\ &= \frac{a\bar{x} + b\bar{y} + ax_0 + by_0 + c}{\alpha\bar{x} + \beta\bar{y} + \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma} \\ &= \frac{a\bar{x} + b\bar{y}}{\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}} \\ &= \frac{a + b\frac{\bar{y}}{\bar{x}}}{\alpha + \beta\frac{\bar{y}}{\bar{x}}}. \end{aligned}$$

Da  $\bar{y}' = (y - y_0)' = y'$ , erhält man folgende neue DGL:

$$\bar{y}' = f\left(\frac{a + b\frac{\bar{y}}{\bar{x}}}{\alpha + \beta\frac{\bar{y}}{\bar{x}}}\right). \quad (7)$$

Man substituiere

$$z = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}, \quad \text{d.h.} \quad \bar{y} = \bar{x}z.$$

Also:

$$z' = \frac{\bar{y}'\bar{x} - \bar{y}}{\bar{x}^2} = \frac{\bar{y}'}{\bar{x}} - \frac{\bar{y}}{\bar{x}^2} = \frac{\bar{y}'}{\bar{x}} - \frac{z}{\bar{x}}.$$

Aufgelöst nach  $\bar{y}'$  ergibt dies

$$\bar{y}' = z'\bar{x} + z.$$

Eingesetzt in (7) ergibt dies

$$z'\bar{x} + z = f\left(\frac{a + bz}{\alpha + \beta z}\right),$$

bzw. aufgelöst nach  $z'$ :

$$z' = \frac{1}{\bar{x}} f\left(\frac{a + bz}{\alpha + \beta z}\right) - \frac{z}{\bar{x}} = \frac{1}{\bar{x}} \left( f\left(\frac{a + bz}{\alpha + \beta z}\right) - z \right). \quad (8)$$

Die Differentialgleichung ist nun mit Hilfe von Trennung der Variablen zu lösen. Daraus erhält man die Lösung von (4) als

$$y = \bar{y} + y_0 = \bar{x}z + y_0 = (x + x_0)z + y_0.$$

**Beispiel:** Man löse

$$y' = f\left(\frac{2x + y - 1}{3x + y + 1}\right) \quad \text{mit } f(t) = \frac{1}{t - 1}.$$

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + y &= 1, \\ 3x + y &= -1 \end{aligned}$$

ist eindeutig lösbar mit der Lösung  $(x_0, y_0) = (-2, 5)$ . Die Differentialgleichung (8) wird also in diesem konkreten Beispiel zu

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1}{\bar{x}} \left( \frac{1}{\frac{2+z}{3+z} - 1} - z \right) = \frac{1}{\bar{x}} \left( \frac{3+z}{2+z-3-z} - z \right) = \frac{1}{\bar{x}} (-3 - z - z) \\ &= -\frac{1}{\bar{x}} (3 + 2z). \end{aligned} \quad (9)$$

Mit Hilfe von Trennung der Variablen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= -\frac{1}{\bar{x}} (3 + 2z) \\ \implies \frac{dz}{3 + 2z} &= -\frac{dx}{\bar{x}} \\ \implies \int \frac{dz}{3 + 2z} &= \int -\frac{dx}{\bar{x}} \\ \implies \frac{1}{2} \ln |3 + 2z| &= -\ln |\bar{x}| + c_0. \end{aligned}$$

Man beachte, daß  $\frac{1}{2} \ln |3 + 2z| = \ln \sqrt{|3 + 2z|}$ . Somit ergibt sich:

$$\sqrt{|3 + 2z|} = e^{-\ln |\bar{x}| + c_0} = \frac{1}{|\bar{x}|} \cdot c_1 \quad \text{mit } c_1 > 0.$$

Quadrieren ergibt

$$|3 + 2z| = \frac{1}{\bar{x}^2} \cdot c_1^2$$

und daraus ergibt sich:

$$3 + 2z = \frac{1}{x^2} \cdot c_1^2 \quad \text{bzw.} \quad 3 + 2z = -\frac{1}{x^2} \cdot c_1^2$$

Aufgelöst nach  $z$  ergibt das die Lösungen von (9):

$$z = \frac{c_2}{2x^2} - \frac{3}{2} \quad \text{mit } c_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Somit ist die Lösung für  $y$  gegeben durch

$$y = (x + x_0)z + y_0 = (x + 2) \left( \frac{c_2}{2(x + 2)^2} - \frac{3}{2} \right) + 5 = \frac{c_2}{2(x + 2)} - \frac{3}{2}(x + 2) + 5.$$