Folie zur Vorlesung "Mathematik B"
07. Juni 2011

Homogene lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung:

Man betrachte eine homogene, lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung der Form

$$\underbrace{y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y}_{=:L[y](x)} = 0,$$

wobei $a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_0(x)$ stetige Funktionen sind, welche auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert sind.

- **Beobachtung:** Jede Linearkombination von Lösungen von $L[y](x) = 0$ ist wieder eine Lösung von $L[y](x) = 0$.

  Beweis: Seien $y_1(x), y_2(x)$ zwei Lösungen von $L[y](x) = 0$, und seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Setze

  $$y_3(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x).$$

  Dann gilt:

  $$\begin{aligned} y_3'(x) &= \alpha y_1'(x) + \beta y_2'(x), \\ y_3''(x) &= \alpha y_1''(x) + \beta y_2''(x), \\ &\vdots \\ y_3^{(n)}(x) &= \alpha y_1^{(n)}(x) + \beta y_2^{(n)}(x). \end{aligned}$$

  Einsetzen von $y_3(x)$ in $L[y](x) = 0$ ergibt:

  $$\begin{aligned} & y_3^{(n)} + a_{n-1}(x)y_3^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y_3'' + a_1(x)y_3' + a_0(x)y_3 \\ = \; & \left[\alpha y_1^{(n)}(x) + \beta y_2^{(n)}(x)\right] + a_{n-1}(x)\left[\alpha y_1^{(n-1)}(x) + \beta y_2^{(n-1)}(x)\right] + \ldots \\ & + a_1(x)\left[\alpha y_1'(x) + \beta y_2'(x)\right] + a_0(x)\left[\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)\right] \\ = \; & \alpha\Big[\underbrace{y_1^{(n)} + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1}_{=0}\Big] \\ & + \beta\Big[\underbrace{y_2^{(n)} + a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2}_{=0}\Big] = 0. \end{aligned}$$

- **Definition:** Die Lösungen $y_1(x), y_2(x), \dots y_r(x)$ von $L[y](x) = 0$ heißen **linear unabhängig**, falls gilt:

$$\Big[\forall x \in I : C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_r y_r(x) = 0\Big] \quad \Longrightarrow \quad C_1 = C_2 = \cdots = C_r = 0.$$

- **Bemerkung 1:** Falls $y_1, \dots y_r$ linear unabhänig sind, lässt sich keine Lösung y_i darstellen als Linearkombination der restlichen y_j.

- **Bemerkung 2:** Da jedes Anfangswertproblem n beliebig wählbare Parameter besitzt, muß der Lösungsraum von $L[y](x) = 0$ n-**dimensional** sein. D.h. es gibt maximal n linear unabhängige Lösungen.

- **Definition:** Ein **Fundamentalsystem** ist eine Menge von n linear unabhängigen Lösungen zur Differentialgleichung $L[y](x) = 0$.

- **Folgerung:** Jede Lösung von $L[y](x) = 0$ hat die Form

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x),$$

wobei $y_1(x), \dots, y_n(x)$ ein Fundamentalsystem bilden und $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$.

Frage: Seien $y_1(x), \dots, y_n(x)$ Lösungen von $L[y](x) = 0$. Wie überprüft man, ob diese Lösungen ein Fundamentalsystem bilden?

Dazu definieren wir die sog. **Wronski-Determinante:**

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \dots & y_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Satz: Die Lösungen $y_1(x), \dots, y_n(x)$ von $L[y](x) = 0$ bilden ein Fundamentalsystem genau dann, wenn $W(x) \neq 0$ für ein (oder äquivalent: für alle) $x \in I$.

Beweisskizze: Beweis durch Widerspruch:

Sei $x_0 \in I$. Annahme: $y_1(x)$ lässt sich als Linearkombination von $y_2(x), \dots, y_n(x)$ darstellen, etwa $y_1(x) = C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$. Dann folgt daraus:

1. Spalte Wronski-Matrix

2. Spalte

3. Spalte

n-te Spalte der Wronski-Matrix

$$\begin{array}{rcl} y_1(x_0) & = & C_2 \cdot y_2(x_0) + C_3 \cdot y_3(x_0) + \dots + C_n \cdot y_n(x_0), \\ y_1'(x_0) & = & C_2 \cdot y_2'(x_0) + C_3 \cdot y_3'(x_0) + \dots + C_n \cdot y_n'(x_0), \\ y_1''(x_0) & = & C_2 \cdot y_2''(x_0) + C_3 \cdot y_3''(x_0) + \dots + C_n \cdot y_n''(x_0), \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & = & C_2 \cdot y_2^{(n-1)}(x_0) + C_3 \cdot y_3^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n \cdot y_n^{(n-1)}(x_0). \end{array}$$

Die rechte Seite der Gleichungen entspricht der ersten Spalte der Wronski-Matrix. Das obige Gleichungssystem hat zur Folge, daß sich die erste Spalte der Wronski-Matrix also als Linearkombination der anderen Spalten der Wronski-Matrix darstellen lässt, d.h. die Spalten der Wronski-Matrix sind linear abhängig, d.h. $W(x_0) = 0$.

Umgekehrt: Wenn $W(x_0) = 0$ gilt, dann sind die Spalten der Wronski-Matrix linear abhängig und es lässt sich mindestens eine Spalte der Wronski-Matrix als Linearkombination der restlichen Spalten darstellen. Dies führt zu einem Gleichungssystem wie oben, woraus die lineare Abhängigkeit der Lösungen folgt.

Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung:

Man betrachte eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung der Form

$$\underbrace{y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y}_{=:L[y](x)} = b(x),$$

wobei $a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_0(x), b(x)$ stetige Funktionen sind, welche auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert sind.

Satz: Sei

$$y_{hom}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x)$$

die vollständige Lösung der zugehörigen homogenen linearen DGL $L[y](x) = 0$. Sei $y_{sp}(x)$ *irgendeine beliebige*, spezielle Lösung von $L[y](x) = b(x)$. Dann ist die allgemeine, vollständige Lösung von $L[y](x) = b(x)$ gegeben durch

$$y_{all}(x) = y_{hom}(x) + y_{sp}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) + y_{sp}(x).$$

Beweis:

- Wir zeigen zunächst, daß $y_{all}(x)$ eine Lösung von $L[y](x) = b(x)$ ist. Zunächst gilt:

  $$y_{all}^{(k)}(x) = y_{hom}^{(k)}(x) + y_{sp}^{(k)}(x) = C_1 y_1^{(k)}(x) + C_2 y_2^{(k)}(x) + \cdots + C_n y_n^{(k)}(x) + y_{sp}^{(k)}(x).$$

  Wir setzen nun in die DGL ein:

  $$\begin{aligned}
  &\left[y_{hom}^{(n)}(x) + y_{sp}^{(n)}(x)\right] + a_{n-1}(x)\left[y_{hom}^{(n-1)}(x) + y_{sp}^{(n-1)}(x)\right] + \ldots \\
  &\quad + a_1(x)\left[y'_{hom}(x) + y'_{sp}(x)\right] + a_0(x)\left[y_{hom}(x) + y_{sp}\right] \\
  = &\left[\underbrace{y_{hom}^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_{hom}^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'_{hom}(x) + a_0(x)y_{hom}(x)}_{=0}\right] \\
  &\quad + \left[\underbrace{y_{sp}^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_{sp}^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'_{sp}(x) + a_0(x)y_{sp}}_{=b(x)}\right] = b(x)
  \end{aligned}$$

- Wir zeigen nun, daß sich zwei verschiedene Lösungen nur um eine Lösung von $L[y](x) = 0$ unterscheiden, d.h. $y_1(x) - y_2(x)$ löst $L[y](x) = 0$, wenn $y_1(x), y_2(x)$ Lösungen von $L[y](x) = b(x)$ sind:

$$\begin{aligned} y_1^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + a_2(x)y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x) &= b(x) \\ y_2^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_2^{(n-1)}(x) + \cdots + a_2(x)y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_0(x)y_2(x) &= b(x). \end{aligned}$$

Subtraktion der zweiten Zeile von der ersten Zeile ergibt die Gleichung

$$\begin{aligned} &\left[y_1^{(n)}(x) - y_2^{(n)}(x)\right] + a_{n-1}(x)\left[y_1^{(n-1)}(x) - y_2^{(n-1)}(x)\right] + \dots \\ &+a_1(x)\left[y_1'(x) - y_2'(x)\right] + a_0(x)\left[y_1(x) - y_2(x)\right] = 0. \end{aligned}$$

Da $y_1^{(k)}(x) - y_2^{(k)}(x) = \big(y_1(x) - y_2(x)\big)^{(k)}$, löst $y_1 - y_2$ die DGL $L[y](x) = 0$.

Lösung des Anfangswertproblems:

Man betrachte eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

mit dem Anfangswertproblem

$$y(x_0) = w_0, y'(x_0) = w_1, y''(x_0) = w_2 \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = w_{n-1},$$

wobei $a_{n-1}(x), \ldots, a_1(x), a_0(x), b(x)$ stetige Funktionen, definiert auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, sind und $x_0 \in I$, $w_0, w_1, \ldots w_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Sei

$$y_{all}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x) + y_{sp}(x)$$

die allgemeine, vollständige Lösung der DGL $L[y](x) = b(x)$. Dann ist also folgendes Gleichungssystem in den Unbekannten $C_1, C_2, \ldots, C_n$ zu lösen:

$$\begin{aligned}
w_0 = y(x_0) &= C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \cdots + C_n y_n(x_0) + y_{sp}(x_0) \\
w_1 = y'(x_0) &= C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \cdots + C_n y_n'(x_0) + y_{sp}'(x_0) \\
\vdots \quad \vdots &\quad \vdots \\
w_{n-1} = y^{(n-1)}(x_0) &= C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) + y_{sp}(x_0).
\end{aligned}$$

In Matrix-Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}}_{=:M(x_0)} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{sp}(x_0) \\ y_{sp}'(x_0) \\ \vdots \\ y_{sp}^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

Da $y_1, \ldots, y_n$ ein Fundamentalsystem bilden, gilt $W(x_0) = \det M(x_0) \neq 0$, und somit ist die Matrix $M(x_0)$ invertierbar. Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems ist also bestimmt durch die Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = M(x_0)^{-1} \left[\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_{sp}(x_0) \\ y_{sp}'(x_0) \\ \vdots \\ y_{sp}^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \right].$$