

# Folien zur Vorlesung “Mathematik B”

## 08. Juni 2010

### Zu linearen DGL $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Es sei eine homogene DGL  $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten gegeben:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0,$$

wobei  $a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ . Sei  $P(\lambda)$  das zugehörige *charakteristische Polynom*, d.h.

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0.$$

Sei nun  $\lambda_1 = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  eine echt-komplexe Nullstelle von  $P(\lambda)$  mit Vielfachheit  $\mu(\lambda_1) = k > 0$ . Es sind also die Funktionen

$$\hat{y}_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \hat{y}_2(x) = x e^{\lambda_1 x}, \dots, \hat{y}_k(x) = x^{k-1} e^{\lambda_1 x}$$

linear unabhängige *komplex-wertige* Lösungen der DGL.

Frage: Wie bekommt man daraus *reell-wertige* Lösungen?

Überlegung: Sei  $y = y_R + iy_I$  eine komplex-wertige Lösung mit Realteil  $y_R$  und Imaginärteil  $y_I$ , d.h.  $y_R$  und  $y_I$  sind reellwertig. Es gilt:

$$y^{(k)} = y_R^{(k)} + iy_I^{(k)}.$$

Wir setzen  $y$  in die DGL ein:

$$(y_R^{(n)} + iy_I^{(n)}) + a_{n-1}(y_R^{(n-1)} + iy_I^{(n-1)}) + \dots + a_1(y_R' + iy_I') + a_0(y_R + iy_I) = 0$$

Umstellen und Trennen nach Real- und Imaginärteil ergibt:

$$\underbrace{\left[ y_R^{(n)} + a_{n-1}y_R^{(n-1)} + \dots + a_1y_R' + a_0y_R \right]}_{=0} + i \underbrace{\left[ y_I^{(n)} + a_{n-1}y_I^{(n-1)} + \dots + a_1y_I' + a_0y_I \right]}_{=0} = 0.$$

D.h.  $y_R$  und  $y_I$  sind auch – nun reellwertige – Lösungen der DGL.

Es gilt:

$$e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)).$$

Die Realteile der Lösungen  $\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_k$  sind somit:

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos(\beta x), y_2 = x e^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, y_k = x^{k-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x).$$

Die Imaginärteile der Lösungen  $\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_k$  sind:

$$y_{k+1} = e^{\alpha x} \sin(\beta x), y_{k+2} = x e^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, y_{2k} = x^{k-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

Somit wurden zur Nullstelle  $\lambda_1$  insgesamt  $2k$  linear unabhängige Lösungen  $y_1, \dots, y_{2k}$  der DGL gefunden.

Bemerkung: Wenn  $\lambda_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  eine Nullstelle von  $P(\lambda)$  ist mit  $\mu(\lambda_1) = k > 0$ , dann ist auch die komplex-konjugierte Zahl  $\bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$  eine Nullstelle von  $P(\lambda)$  mit  $\mu(\bar{\lambda}_1) = k$ . Da aber

$$e^{\bar{\lambda}_1 x} = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) - i \sin(\beta x)),$$

sind die Realteile der Lösungen zu  $\bar{\lambda}_1$  identisch mit den Realteilen der Lösungen zu  $\lambda_1$ ; die Imaginärteile der Lösungen zu  $\bar{\lambda}_1$  sind bis auf negatives Vorzeichen auch identisch mit den Imaginärteilen der Lösungen zu  $\lambda_1$ .

Mit anderen Worten: Man muss nur die  $2k$  Lösungen zu  $\lambda_1$  bestimmen; die Nullstelle  $\bar{\lambda}_1$  muss nicht mehr weiter betrachtet werden!

## Beispiele zu linearen DGL $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

1. Aufgabe: Löse das folgende Anfangswertproblem:

$$y'' - 3y' + 2y = x, \quad \text{mit } y(0) = 1, y'(0) = 2.$$

Lösung: Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2).$$

Die Lösung der zugehörigen homogenen DGL ist somit gegeben durch:

$$y_{hom}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Die Störfunktion hat die Form  $b(x) = x = x e^{0 \cdot x}$ . Zur Bestimmung einer speziellen Lösung verwenden wir den Ansatz

$$y_{sp}(x) = x^{\mu(0)} e^{0 \cdot x} (A + Bx) = A + Bx.$$

Differenzieren von  $y_{sp}$  ergibt  $y'_{sp} = B$  und  $y''_{sp} = 0$ . Einsetzen in die DGL ergibt somit:

$$0 - 3B + 2(A + Bx) = x.$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$$x^0 : -3B + 2A = 0, \quad x^1 : 2B = 1$$

Daraus ergibt sich  $B = 1/2$  und  $A = 3/4$ . Somit ist die allgemeine Lösung der DGL gegeben durch

$$y_{all}(x) = y_{hom}(x) + y_{sp}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x.$$

Zum Lösen des Anfangswertproblems leiten wir  $y_{all}(x)$  einmal ab:

$$y'_{all}(x) = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}.$$

Wir setzen in  $y_{all}(x)$  und  $y'_{all}(x)$  den Wert  $x = 0$  ein und kommen auf folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 1 &= y_{all}(0) = C_1 + C_2 + \frac{3}{4} \\ 2 &= y'_{all}(0) = C_1 + 2C_2 + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die Werte  $C_1 = -1$  und  $C_2 = 5/4$ , d.h. die Lösung ist

$$y(x) = -e^x + \frac{5}{4}e^{2x} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x.$$

2. Aufgabe: Bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 e^x.$$

Lösung: Wie im ersten Beispiel ist die vollständige Lösung der zugehörigen homogenen DGL gegeben durch:

$$y_{hom}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Zur Bestimmung einer speziellen Lösung verwenden wir den Ansatz

$$y_{sp}(x) = x^{\mu(1)} e^x (A + Bx + Cx^2) = e^x (Ax + Bx^2 + Cx^3).$$

Differenzieren von  $y_{sp}$  ergibt:

$$\begin{aligned} y'_{sp}(x) &= e^x (Ax + Bx^2 + Cx^3) + e^x (A + 2Bx + 3Cx^2), \\ y''_{sp}(x) &= e^x (Ax + Bx^2 + Cx^3) + 2e^x (A + 2Bx + 3Cx^2) + e^x (2B + 6Cx). \end{aligned}$$

Einsetzen von  $y_{sp}(x)$  in die DGL ergibt somit:

$$\begin{aligned} e^x (Ax + Bx^2 + Cx^3) + 2e^x (A + 2Bx + 3Cx^2) + e^x (2B + 6Cx) \\ - 3(e^x (Ax + Bx^2 + Cx^3) + e^x (A + 2Bx + 3Cx^2)) \\ + 2e^x (Ax + Bx^2 + Cx^3) = x^2 e^x. \end{aligned}$$

Es wird auf beiden Seiten der Gleichung durch  $e^x$  dividiert und dann ein Koeffizientenvergleich gemacht:

$$\begin{aligned} x^3 : \quad 0 &= C - 3C + 2C = 0 \\ x^2 : \quad 1 &= B + 6C - 3B - 9C + 2B = -3C \\ x^1 : \quad 0 &= A + 4B + 6C - 3A - 6B + 2A = 6C - 2B \\ x^0 : \quad 0 &= 2A + 2B - 3A = 2B - A \end{aligned}$$

Lösung dieses Gleichungssystems ist  $A = -2$ ,  $B = -1$ ,  $C = -1/3$ . Somit ist die allgemeine Lösung der DGL gegeben durch

$$y_{all}(x) = y_{hom}(x) + y_{sp}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + e^x \left( -2x - x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right).$$

3. Aufgabe: Bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y'' - 4y' + 13y = e^{-x}.$$

Lösung: Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 13 = (\lambda - (2 + 3i))(\lambda - (2 - 3i)).$$

Die Lösung der zugehörigen homogenen DGL ist somit gegeben durch:

$$y_{hom}(x) = C_1 e^{2x} \cos(3x) + C_2 e^{2x} \sin(3x).$$

Zur Bestimmung einer speziellen Lösung verwenden wir den Ansatz

$$y_{sp}(x) = x^{\mu(-1)} e^{-x} A = A e^{-x}.$$

Differenzieren von  $y_{sp}$  ergibt  $y'_{sp} = -A e^{-x}$  und  $y''_{sp} = A e^{-x}$ . Einsetzen von  $y_{sp}(x)$  in die DGL ergibt somit:

$$A e^{-x} - 4(-A e^{-x}) + 13A e^{-x} = e^{-x}.$$

Dividieren durch  $e^{-x}$  ergibt  $A = 1/18$ . Somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$y_{all}(x) = y_{hom}(x) + y_{sp}(x) = C_1 e^{2x} \cos(3x) + C_2 e^{2x} \sin(3x) + \frac{1}{18} e^{-x}.$$

4. Aufgabe: Bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y'' - 4y' + 13y = \cos(3x)e^{2x}.$$

Lösung: Wie im vorhergehenden Beispiel ist die Lösung der zugehörigen homogenen DGL gegeben durch:

$$y_{hom}(x) = C_1 e^{2x} \cos(3x) + C_2 e^{2x} \sin(3x).$$

Die Störfunktion hat hier die Form

$$b(x) = (1 \cdot \cos(3x) + 0 \cdot \sin(3x))e^{2x}.$$

Zur Bestimmung einer speziellen Lösung verwenden wir den Ansatz

$$\begin{aligned} y_{sp}(x) &= x^{\mu(2+3i)} e^{2x} (A \cos(3x) + B \sin(3x)) \\ &= e^{2x} (Ax \cos(3x) + Bx \sin(3x)). \end{aligned}$$

Differenzieren von  $y_{sp}$  ergibt:

$$\begin{aligned} y'_{sp}(x) &= e^{2x} (2Ax \cos(3x) + 2Bx \sin(3x) + A \cos(3x) \\ &\quad - 3Ax \sin(3x) + B \sin(3x) + 3Bx \cos(3x)), \\ y''_{sp}(x) &= -e^{2x} (5Ax \cos(3x) + 5Bx \sin(3x) - 4A \cos(3x) + 12Ax \sin(3x) \\ &\quad - 4B \sin(3x) - 12Bx \cos(3x) + 6A \sin(3x) - 6B \cos(3x)) \end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL ergibt:

$$-6e^{2x} (A \sin(3x) - B \cos(3x)) = \cos(3x)e^{2x},$$

bzw.  $-6A \sin(3x) + 6B \cos(3x) = \cos(3x)$ . Koeffizientenvergleich liefert also  $A = 0$  und  $B = 1/6$ . Somit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$y_{all}(x) = y_{hom}(x) + y_{sp}(x) = C_1 e^{2x} \cos(3x) + C_2 e^{2x} \sin(3x) + \frac{1}{6} e^{2x} x \sin(3x).$$

5. Aufgabe: Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$y'' - 3y' + 2y = x + e^{2x}.$$

Lösung: Die Lösung der zugehörigen homogenen DGL ist gegeben durch (siehe oben):

$$y_{hom}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Die Störfunktion hat die Form  $b(x) = x e^{0 \cdot x} + e^{2x}$ . Eine spezielle Lösung zur DGL  $y'' - 3y' + 2y = x$  ist gegeben durch (siehe oben)

$$y_{sp,1}(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x$$

Wir suchen nun noch eine spezielle Lösung zur DGL  $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$ . Dazu verwenden wir den Ansatz

$$y_{sp,2}(x) = x^{\mu(2)} e^{2x} A = A x e^{2x}.$$

Differenzieren von  $y_{sp,2}$  ergibt:

$$y'_{sp,2} = A e^{2x} + 2A x e^{2x} \quad \text{und} \quad y''_{sp,2} = 4A e^{2x} + 4A x e^{2x}.$$

Einsetzen in die DGL ergibt somit:

$$e^{2x}(4A + 4Ax) - 3e^{2x}(A + 2Ax) + 2A x e^{2x} = e^{2x},$$

bzw.  $A - 0 \cdot x = 1$ , also  $A = 1$ . Somit ist eine spezielle Lösung von  $y'' - 3y' + 2y = x + e^{2x}$  gegeben durch

$$y_{sp}(x) = y_{sp,1}(x) + y_{sp,2}(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x + x e^{2x}.$$

Somit ist die allgemeine Lösung der DGL gegeben durch

$$y_{all}(x) = y_{hom}(x) + y_{sp}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x + x e^{2x}.$$

### Reduktion der Ordnung:

Wir betrachten eine DGL der Form:

$$(*) \quad y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x).$$

Ziel ist es, diese DGL in eine lineare DGL erster Ordnung umzuformen. Dazu nehmen wir an, daß wir eine Lösung  $y_1(x)$  der zugehörigen homogenen DGL  $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$  "erraten" haben. Wir setzen

$$y(x) = y_1(x) \cdot u(x).$$

Differenzieren ergibt:

$$\begin{aligned} y'(x) &= y_1'(x)u(x) + y_1(x)u'(x), \\ y''(x) &= y_1''(x)u(x) + y_1'(x)u'(x) + y_1'(x)u'(x) + y_1(x)u''(x) \\ &= y_1''(x)u(x) + 2y_1'(x)u'(x) + y_1(x)u''(x). \end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL (\*) ergibt:

$$y_1''(x)u(x) + 2y_1'(x)u'(x) + y_1(x)u''(x) + a_1(x)(y_1'(x)u(x) + y_1(x)u'(x)) + a_0(x)y_1(x)u(x) = b(x),$$

bzw. umgeformt:

$$u(x) \underbrace{(y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x))}_{=0} + 2y_1'(x)u'(x) + y_1(x)u''(x) + a_1(x)y_1(x)u'(x) = b(x).$$

Wir ersetzen nun  $z(x) = u'(x)$  und erhalten somit eine neue DGL erster Ordnung:

$$z(2y_1'(x) + a_1(x)y_1(x)) + z'y_1(x) = b(x).$$

Diese kann man wie gewohnt lösen und durch Integration von  $z(x)$  bestimmt man  $u(x)$ , und daraus  $y(x) = y_1(x)u(x)$ .

Beispiel: Man bestimme die allgemeine Lösung der DGL

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = x^2 + 1.$$

Lösung: Wir "erraten" eine Lösung  $y_1(x) = x$  der homogenen DGL  $y'' + y'/x - y/x^2 = 0$ . Wir setzen  $y(x) = x \cdot u(x)$  und  $z(x) = u'(x)$  und erhalten die neue DGL:

$$z(2 \cdot 1 + \frac{1}{x} \cdot x) + z' \cdot x = x^2 + 1,$$

bzw.  $z' = -3z/x + (x^2 + 1)/x$ . Es ist

$$z_{hom}(x) = C e^{\int -3/x dx} = \frac{C}{x^3}.$$



Die spezielle Lösung ergibt sich als

$$z_{sp} = \int \frac{x^2 + 1}{x} \cdot x^3 dx = \int x^4 + x^2 dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3.$$

Also:

$$z_{all}(x) = z_{hom}(x) + z_{sp} = \frac{C}{x^3} + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3.$$

Daraus ergibt sich:

$$u(x) = \int z(x) dx = -\frac{C}{2x^2} + \frac{1}{30}x^6 + \frac{1}{12}x^4.$$

Somit ist die gesuchte allgemeine Lösung:

$$y(x) = y_1(x)u(x) = \frac{\hat{C}}{x} + \frac{1}{30}x^7 + \frac{1}{12}x^5.$$

### Variation der Konstanten:

Wir betrachten eine DGL der Form:

$$(*) \quad y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

wobei die vollständige Lösung der zugehörigen DGL  $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$  gegeben sei durch

$$y_{hom}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

d.h.  $y_1, y_2$  bilden ein Fundamentalsystem. Wir wollen nun eine spezielle Lösung zu  $(*)$  bestimmen. Dazu ersetzen wir in  $y_{hom}$  die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  durch Funktionen  $C_1(x)$  und  $C_2(x)$ . Wir verwenden den Ansatz

$$y_{sp}(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \text{ mit } C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0.$$

Differentiation von  $y_{sp}(x)$  ergibt:

$$\begin{aligned} y'_{sp}(x) &= C_1'(x)y_1(x) + C_1(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2(x) + C_2(x)y_2'(x) \\ &= C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x), \\ y''_{sp}(x) &= C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x). \end{aligned}$$

Einsetzen in  $(*)$  ergibt:

$$\begin{aligned} C_1'(x)y_1'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_2(x)y_2''(x) \\ + a_1(x)(C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)) + a_0(x)(C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)) = b(x), \end{aligned}$$

bzw. umgeformt

$$\begin{aligned} &C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) \\ &+ C_1(x) \underbrace{(y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_0(x)y_1(x))}_{=0} \\ &+ C_2(x) \underbrace{(y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_0(x)y_2(x))}_{=0} = b(x). \end{aligned}$$

Das bedeutet, daß  $C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = b(x)$  gelten muss. Wir betrachten nun das Gleichungssystem

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \quad C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = b(x).$$

Lösung dieses Gleichungssystems ist

$$C_1'(x) = \frac{-b(x)y_2(x)}{W(x)} \text{ und } C_2'(x) = \frac{b(x)y_1(x)}{W(x)},$$

wobei  $W(x)$  die Wronski-Determinante zum Fundamentalsystem  $y_1, y_2$  ist. Man beachte, daß  $W(x) \neq 0$ . Durch Integration von  $C_1'(x)$  und  $C_2'(x)$  finden wir  $C_1(x)$  und  $C_2(x)$  und somit die spezielle Lösung  $y_{sp}(x)$ .

Beispiel: Man bestimme die allgemeine Lösung von

$$(*) \quad y'' - 4y = \frac{1}{e^x + 1}$$

Lösung: Das charakteristische Polynom ist  $P(\lambda) = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$ . Die Lösung der zugehörigen homogenen DGL ist

$$y_{hom}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Zur Bestimmung einer speziellen Lösung verwenden wir den Ansatz mittels Variation der Konstanten  $y_{sp}(x) = C_1(x)e^{2x} + C_2(x)e^{-2x}$ . Es gilt:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -4.$$

Somit sind

$$C_1'(x) = \frac{1}{4} \frac{e^{-2x}}{e^x + 1}, \quad C_2'(x) = -\frac{1}{4} \frac{e^{2x}}{e^x + 1}.$$

Integration (mittels Substitution und Partialbruchzerlegung) von  $C_1(x)$  und  $C_2(x)$  ergibt

$$\begin{aligned} C_1(x) &= \frac{1}{4} e^{-x} - \frac{1}{4} \ln(1 + e^x) - \frac{1}{8} e^{-2x} + \frac{x}{4}, \\ C_2(x) &= -\frac{1}{4} e^x + \frac{1}{4} \ln(1 + e^x). \end{aligned}$$

Also ist

$$y_{sp}(x) = \frac{1}{4} e^x - \frac{1}{4} e^{2x} \ln(1 + e^x) - \frac{1}{8} + \frac{x}{4} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{-x} + \frac{1}{4} e^{-2x} \ln(1 + e^x).$$

Somit ist die allgemeine Lösung von (\*) gegeben durch

$$y_{all}(x) = y_{hom}(x) + y_{sp}(x).$$