

Folien zur Vorlesung “Mathematik B”

21. Juni 2011

Ansatzmethode bei linearen DGL-Systemen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

Es sei ein lineares DGL-System erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten gegeben:

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(x),$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wir nehmen an, dass der Störvektor $\vec{b}(x)$ folgende Form besitzt:

$$\vec{b}(x) = e^{\alpha x} \left[\begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix} \cos(\beta x) + \begin{pmatrix} q_1(x) \\ \vdots \\ q_n(x) \end{pmatrix} \sin(\beta x) \right].$$

Da $e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i \sin(\beta x)$, können wir $\cos(\beta x)$ und $\sin(\beta x)$ wir folgt umschreiben:

$$\cos(\beta x) = \frac{1}{2}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}), \quad \sin(\beta x) = -\frac{i}{2}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}).$$

Wir setzen nun diese Ausdrücke in $\vec{b}(x)$ ein:

$$\begin{aligned} \vec{b}(x) &= e^{\alpha x} \left[\begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix} \frac{e^{i\beta x}}{2} + \begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix} \frac{e^{-i\beta x}}{2} - \begin{pmatrix} q_1(x) \\ \vdots \\ q_n(x) \end{pmatrix} \frac{i}{2} e^{i\beta x} + \begin{pmatrix} q_1(x) \\ \vdots \\ q_n(x) \end{pmatrix} \frac{i}{2} e^{-i\beta x} \right] \\ &= \underbrace{e^{(\alpha+i\beta)x} \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} q_1(x) \\ \vdots \\ q_n(x) \end{pmatrix} \right]}_{=:\vec{b}_1(x)} + \underbrace{e^{(\alpha-i\beta)x} \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} q_1(x) \\ \vdots \\ q_n(x) \end{pmatrix} \right]}_{=:\vec{b}_2(x)} \end{aligned}$$

Das heißt, wir können den Störvektor zerlegen in $\vec{b}(x) = \vec{b}_1(x) + \vec{b}_2(x)$. Man beachte, daß $\vec{b}_2(x) = \overline{\vec{b}_1(x)}$. Wir berechnen nun zum System $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}_1(x)$ eine spezielle (komplexwertige) Lösung $\vec{y}_{1,sp}(x)$ mit Hilfe des Ansatzes

$$\vec{y}_{1,sp}(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} \begin{pmatrix} Q_1(x) \\ \vdots \\ Q_n(x) \end{pmatrix},$$

wobei $Q_1(x), \dots, Q_n(x)$ Polynome mit unbekannten Koeffizienten sind vom Grad $\mu(\alpha + i\beta) + m$, wobei m der maximal auftretende Grad der Polynome $p_1(x), \dots, p_n(x), q_1(x), \dots, q_n(x)$ ist und $\mu(\alpha + i\beta)$ die Vielfachheit von $\alpha + i\beta$ als Nullstelle im charakteristischen Polynom $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ ist. Man leitet dann $\vec{y}_{1,sp}(x)$ komponentenweise nach x ab, setzt in das inhomogene DGL-System $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$ ein und mittels Koeffizientenvergleich werden die (eventuell komplexwertigen) Koeffizienten von $Q_1(x), \dots, Q_n(x)$ bestimmt.

Beobachtung: $\vec{y}_{2,sp}(x) := \overline{\vec{y}_{1,sp}(x)}$ ist dann eine spezielle Lösung des Systems $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}_2(x)$, denn:

$$\begin{aligned}\vec{y}'_{2,sp}(x) &= \overline{\vec{y}'_{1,sp}(x)} = \overline{A\vec{y}_{1,sp}(x) + \vec{b}_1(x)} = \overline{A}\overline{\vec{y}_{1,sp}(x)} + \overline{\vec{b}_1(x)} \\ &= A\overline{\vec{y}_{1,sp}(x)} + \vec{b}_2(x) = A\vec{y}_{2,sp}(x) + \vec{b}_2(x).\end{aligned}$$

Somit ist eine spezielle (reellwertige) Lösung zum Störvektor $\vec{b}(x) = \vec{b}_1(x) + \vec{b}_2(x)$ gegeben durch

$$\vec{y}_{sp}(x) = \vec{y}_{1,sp}(x) + \vec{y}_{2,sp}(x) = 2\operatorname{Re}(\vec{y}_{1,sp}(x)).$$

Beispiel: Man löse folgendes Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned}y'_1 &= 2y_1 - y_2 + e^{2x} \cos(x), \\ y'_2 &= y_1 + 2y_2, \\ y_1(0) &= 1, \quad y_2(0) = 2.\end{aligned}$$

Lösung: Die zugehörige Koeffizientenmatrix und der Störvektor sind

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} \cos(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen das charakteristische Polynom:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 + 1 = (\lambda - (2 + i))(\lambda - (2 - i)).$$

Wir berechnen einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 2 + i$:

$$\vec{0} = (A - (2 + i)I)\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich $v_2 = -iv_1$. Wir setzen $v_1 = 1$ und erhalten somit den Eigenvektor $\vec{v}_1 = (1, -i)^t$. Somit ergibt sich eine komplexe Lösung des homogenen Systems $\vec{y}' = A\vec{y}$ als

$$\begin{aligned}\vec{y}_1(x) &= e^{(2+i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = e^{2x} (\cos(x) + i \sin(x)) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{e^{2x} \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}}_{=\vec{y}_1(x)} + i \underbrace{e^{2x} \begin{pmatrix} \sin(x) \\ -\cos(x) \end{pmatrix}}_{=\vec{y}_2(x)}\end{aligned}$$

Aufspalten von $\vec{y}_1(x)$ nach Real- und Imaginärteil liefert die reellwertigen Lösungen $\vec{y}_1(x)$ und $\vec{y}_2(x)$, d.h. die vollständige (reellwertige) Lösung des homogenen Systems $\vec{y}' = A\vec{y}$ ist

$$\vec{y}_{hom}(x) = C_1 \vec{y}_1(x) + C_2 \vec{y}_2(x) = C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} \sin(x) \\ -\cos(x) \end{pmatrix}.$$

Nun suchen wir eine spezielle (reellwertige) Lösung des inhomogenen DGL-Systems $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$. Die Störfunktion hat die Form

$$\vec{b}(x) = e^{2x} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(x) \right] = \underbrace{e^{(2+i)x} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}_1(x)} + \underbrace{e^{(2-i)x} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}_2(x)},$$

d.h. $p_1(x) = 1, p_2(x) = q_1(x) = q_2(x) = 0$ und $m = \max\{\deg(p_i), \deg(q_i)\} = 0$. Wir berechnen nun eine spezielle (komplexwertige) Lösung zum System $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}_1(x)$ mit Hilfe des Ansatzes

$$\vec{y}_{1,sp}(x) = e^{(2+i)x} \begin{pmatrix} A + Bx \\ C + Dx \end{pmatrix}$$

Man beachte, daß $2 + i$ ein Eigenwert von A ist, so daß die Polynome mit unbekanntem Koeffizienten im Ansatz den Grad $\mu(2+i) + m = 1 + 0$ besitzen. Komponentenweise Differentiation von $\vec{y}_{1,sp}(x)$ ergibt:

$$\vec{y}'_{1,sp}(x) = (2+i)e^{(2+i)x} \begin{pmatrix} A + Bx \\ C + Dx \end{pmatrix} + e^{(2+i)x} \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in das DGL-System $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}_1(x)$ liefert folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}(2+i)e^{(2+i)x}(A+Bx) + e^{(2+i)x}B &= 2e^{(2+i)x}(A+Bx) - e^{(2+i)x}(C+Dx) + \frac{e^{(2+i)x}}{2}, \\ (2+i)e^{(2+i)x}(C+Dx) + e^{(2+i)x}D &= e^{(2+i)x}(A+Bx) + 2e^{(2+i)x}(C+Dx).\end{aligned}$$

Kürzen durch $e^{(2+i)x}$ und Sortieren nach Potenzen von x ergibt:

$$\begin{aligned}(2+i)Bx + ((2+i)A + B) &= (2B - D)x + (2A - C + \frac{1}{2}), \\ (2+i)Dx + ((2+i)C + D) &= (B + 2D)x + (A + 2C).\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}(2+i)B &= 2B - D, \\ (2+i)A + B &= 2A - C + \frac{1}{2}, \\ (2+i)D &= B + 2D, \\ (2+i)C + D &= A + 2C.\end{aligned}$$

Aus der vierten Gleichung folgt $A = iC + D$. Aus der zweiten Gleichung ergibt sich damit:

$$B = -C + \frac{1}{2} - iA = -C + \frac{1}{2} + C - iD = \frac{1}{2} - iD.$$

Eingesetzt in die erste Gleichung ergibt dies $D = -iB = -i/2 - D$, d.h. $D = -i/4$ und somit $B = 1/4$. Die zweite und vierte Gleichung vereinfachen sich somit zu

$$iA = -C + \frac{1}{4}, \quad iC - \frac{i}{4} = A.$$

Die zweite Gleichung in die erste eingesetzt ergibt:

$$C = \frac{1}{4} - iA = \frac{1}{4} + C - \frac{1}{4} = C,$$

d.h. C ist frei wählbar, z.B. $C = 0$ und damit $A = -i/4$. Somit ist eine spezielle Lösung $\vec{y}_{1,sp}(x)$ zu $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}_1(x)$ gegeben durch

$$\vec{y}_{1,sp}(x) = e^{(2+i)x} \begin{pmatrix} \frac{-i}{4} + \frac{1}{4}x \\ -\frac{i}{4}x \end{pmatrix}$$

Der Realteil von $\vec{y}_{1,sp}(x)$ ist

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\vec{y}_{1,sp}(x)) &= \operatorname{Re} \left[e^{2x} \begin{pmatrix} -\frac{i}{4} \cos(x) + \frac{1}{4} \sin(x) + \frac{x}{4} \cos(x) + \frac{ix}{4} \sin(x) \\ -\frac{i}{4}x \cos(x) + \frac{x}{4} \sin(x) \end{pmatrix} \right] \\ &= e^{2x} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \sin(x) + \frac{x}{4} \cos(x) \\ \frac{x}{4} \sin(x) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Somit ist eine reellwertige spezielle Lösung des zu Beginn gegebenen DGL-Systems $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$ gegeben durch

$$\vec{y}_{sp}(x) = 2\operatorname{Re}(\vec{y}_{1,sp}(x)) = 2e^{2x} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sin(x) + \frac{x}{4}\cos(x) \\ \frac{x}{4}\sin(x) \end{pmatrix}.$$

Damit ist die allgemeine Lösung des DGL-Systems $\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(x)$ gegeben durch

$$\vec{y}_{all}(x) = C_1 e^{2x} \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} \sin(x) \\ -\cos(x) \end{pmatrix} + 2e^{2x} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sin(x) + \frac{x}{4}\cos(x) \\ \frac{x}{4}\sin(x) \end{pmatrix}.$$

Zum Lösen des AWP setzen wir $x = 0$ in die allgemeine Lösung ein:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \\ C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot (-1) + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Also ist die Lösung des AWP gegeben durch

$$\vec{y}(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix} + 2e^{2x} \begin{pmatrix} \sin(x) \\ -\cos(x) \end{pmatrix} + 2e^{2x} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sin(x) + \frac{x}{4}\cos(x) \\ \frac{x}{4}\sin(x) \end{pmatrix}.$$